Notas del curso de Algebra Lineal II

Luis Valero Elizondo

09 de Diciembre del 2007

Índice general

Introducción.

Estas son las notas del curso de Algebra Lineal II impartido por Luis Valero Elizondo en la licenciatura de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México. Se pueden bajar por internet de la página del autor, que es

`http://www.fismat.umich.mx/~valero`

Escribí estas notas para que ustedes (mis alumnos) no tengan que perder tiempo en clase escribiendo. Si se ponen a hacer cuentas, notarán que pasan la mayor parte del tiempo de una clase típica escribiendo, y muy poco tiempo pensando o haciendo activamente matemáticas.

Para que ustedes puedan aprovechar al máximo este curso, es indispensable que le dediquen muchas horas de esfuerzo dentro y fuera del salón de clases. Antes de cada clase es muy importante que lean con cuidado el material que vamos a cubrir, que usualmente consistirá de una o dos secciones de estas notas (pues son secciones muy cortas).

También antes de clase deben intentar hacer todos los ejercicios de las secciones que lean. En cualquier caso, incluso si no les sale uno o varios ejercicios, ya habrán pasado un tiempo razonable pensando en ellos, y eso nos será de utilidad cuando cubramos ese material en la clase. Los ejercicios para cada sección se dividen en tres clases:

Los *ejercicios computacionales* son cuentas más o menos sencillas, aunque a veces llevan algo de tiempo.

Los *ejercicios de falso o verdadero* ponen a prueba su intuición, así como su habilidad para encontrar contraejemplos o dar demostraciones propias.

Los últimos ejercicios son las *demostraciones*, muy importantes para desarrollar el pensamiento analítico propio de los científicos.

Dentro de la clase vamos a hablar acerca del material que prepararon, y nos vamos a ir con bastante rapidez. Si no prepararon la lección, entonces la clase será tan aburrida como oír gente hablando de una película que no han visto. Si no leyeron las definiciones, no van a saber ni siquiera de lo que estamos hablando; y si leyeron las notas sin haber hecho los ejercicios, no van a poder entender lo que hagamos porque les faltará familiaridad con el tema. No tiene nada de vergorzoso haber intentado los ejercicios y estar atorado en uno o varios; de hecho yo estaré en la mejor disposición de ayudarlos y aclararles sus dudas. Pero es muy importante que ustedes hagan un esfuerzo por aprenderse las definiciones, y que le dediquen al menos 10 minutos a cada ejercicio antes de darse por vencidos. Noten que esto involucra un compromiso de parte de ustedes de al menos unas 4 o 5 horas por semana fuera del salón de clases para dedicarle a mi materia.

Al final de estas notas hay un índice analítico, para facilitarles la vida si necesitan encontrar una definición o notación (por ejemplo, qué es un **eigenvalor**, o cómo denoto en las notas a los subespacios **ortogonales**). Las palabras que aparecen en el índice analítico están en **negritas** en el texto. Casi siempre cerca de una definición hay ejercicios que tienen que ver con ella, y que les pueden servir de inspiración cuando estén resolviendo otros ejercicios.

Espero que estas notas les ayuden a entender mejor el álgebra lineal, y que aprendamos y nos divirtamos mucho en nuestro curso.

Capítulo 1

Formas Canónicas Elementales.

1.1. Valores y vectores propios

Definición 1. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Un **valor propio** (también llamado **valor característico**, **eigenvalor**, **valor espectral**, o **raíz característica**) de T es un escalar c de F tal que existe un vector no nulo v en V con $T(v) = cv$. Si c es un valor propio de T, cualquier vector v en V tal que $T(v) = cv$ se llama un **vector propio** (también llamado **vector característico**, o **eigenvector**) de T asociado al valor propio c. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, los valores propios de T se pueden encontrar buscando las constantes c para las cuales el sistema de ecuaciones lineales $T(v) = cv$ tenga solución no trivial, y los vectores propios con valor propio c pueden encontrarse resolviendo dicho sistema de ecuaciones lineales. El conjunto de todos los vectores propios de T asociados al valor propio c se llama el **espacio propio** asociado a c. A este espacio comúnmente se le añade el vector cero.

Ejemplo 2. Sean F un campo arbitrario, V cualquier espacio vectorial sobre F, y T el operador identidad en V. Entonces cualquier vector no nulo en V es vector propio de T con valor propio uno.

Ejemplo 3. Sean F un campo arbitrario, V cualquier espacio vectorial sobre F, y T cualquier operador no inyectivo en V. Entonces los vectores propios de T con valor propio cero son precisamente los vectores no nulos en el núcleo de T.

Ejemplo 4. Sean F el campo real, V el plano $\mathbb{R}^2$, y T el operador en V dado por $T(x, y) = (2x, -y)$. Los valores propios de T son 2 y -1. Los vectores propios de T con valor propio 2 son los vectores no nulos de la forma $(x, 0)$, y los vectores propios de T con valor propio -1 son los vectores no nulos de la forma $(0, y)$.

Ejemplo 5. Sean F el campo real, V el plano $\mathbb{R}^2$, y T el operador en V dado por $T(x, y) = (y, -x)$. Entonces T no tiene valores propios reales.

Ejemplo 6. Sean F el campo complejo, V el espacio $\mathbb{C}^2$, y T el operador en V dado por $T(x, y) = (y, -x)$. Entonces T tiene dos valores propios complejos, a saber, i y $-i$. Los vectores propios de T con valor propio i son los vectores no nulos de la forma (x, ix) con x en F; los vectores propios de T con valor propio $-i$ son los vectores no nulos de la forma $(x, -ix)$ con x en F.

Teorema 7. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, sea T un operador lineal en V, y sea c un escalar en F. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El escalar c es un valor propio de T.*
2. *El operador $(T - cI)$ es singular (es decir, no es inyectivo).*
3. *El determinante de $(T - cI)$ es cero.*

Demostración: Es claro que un vector v es un vector propio de T con valor propio c si y solamente si v está en el núcleo de $T - cI$. El resto se sigue de que V es de dimensión finita, y por lo tanto un operador es singular si y solamente si su determinante es cero. $\square$

1.2. Polinomio característico

Definición 8. Sea A una matriz cuadrada con entradas en un campo F. El **polinomio característico** de A es el determinante de $(xI - A)$, donde x es una indeterminada, e I es la matriz identidad (de iguales dimensiones que A).

Teorema 9. *Sean A y B matrices semejantes. Entonces A y B tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración: El si A y B son semejantes, entonces $xI - A$ y $xI - B$ también lo son, y por lo tanto tienen el mismo determinante. $\square$

Teorema 10. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F, T un operador lineal en V, y A la matriz asociada a T con respecto a alguna base de V. Tenemos que*

1. *Los valores propios de T coinciden con las raíces del polinomio característico de A.*

2. *Si B es una matriz asociada a T con respecto a alguna otra base de V, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico.*

*Debido a esto, definimos los **valores propios** de la matriz A como los valores propios del operador T, y definimos el **polinomio característico** del operador T como el polinomio característico de la matriz A.*

Demostración: La primera parte se sigue de que los valores propios de T son aquellos para los cuales $cI - A$ tiene determinante cero. La segunda parte se sigue de que matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. □

1.3. Diagonalizabilidad

Definición 11. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Decimos que T es **diagonalizable** si existe una base de V que consta de vectores propios de T. Sea A una matriz cuadrada con entradas en el campo F. Decimos que A es **diagonalizable** si A es semejante a una matriz diagonal.

Lema 12. *Sea T un operador lineal sobre un espacio V de dimensión finita tal que $T(v) = cv$ para un vector v en V y un escalar c. Si $f(x)$ es un polinomio con escalares en el campo, entonces $f(T)(v) = f(c)v$.*

Demostración: Ejercicio. □

Corolario 13. *Sea T un operador lineal sobre un espacio V de dimensión finita, sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores propios (no nulos) de T con valores propios diferentes. Entonces $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes.*

Demostración: Ejercicio. □

Teorema 14. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F, y T un operador lineal en V. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El operador T es diagonalizable.*
2. *La matriz asociada a T con respecto a cualquier base es una matriz diagonalizable.*
3. *Existe una base con respecto a la cual la matriz asociada a T es diagonal.*
4. *El polinomio característico de T se factoriza totalmente sobre el campo F y, además, para cada valor propio c de T, tenemos que la multiplicidad de c en el polinomio caracterítico de T es igual a la dimensión del espacio propio asociado a c.*
5. *La suma de las dimensiones de todos los espacios propios de T es igual a la dimensión de V.*

Demostración: T tiene una base de vectores propios si y solamente si existe una base con respecto a la cual la matriz de T es diagonal, lo que equivale a que cualquier matriz que represente a T con respecto a cualquier base es diagonalizable (por ser semejantes todas estas matrices). Por otro lado, si existe una base de vectores propios de T, en particular esta base se particiona en bases para los espacios propios de T, y por lo tanto la suma de sus dimensiones debe ser la dimensión de V (pues vectores propios con distintos valores propios son linealmente independientes), e inversamente, juntando bases de los espacios propios podemos construir un conjunto linealmente independiente, que por dimensiones, debe ser una base de vectores propios de T. $\square$

1.4. Polinomio minimal

Teorema 15. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Sea L el conjunto de todos los polinomios $f(x)$ con coeficientes en F que anulan a T, es decir, tales que $f(T)$ es el operador cero. Tenemos que:*

1. *La familia L es cerrada bajo sumas, es decir, si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios en L, entonces $f(x) + g(x)$ está en L.*

2. *La familia L absorbe productos, es decir, si $f(x)$ es un polinomio en L y $g(x)$ es un polinomio arbitrario (no necesariamente en L), entonces $f(x)g(x)$ está en L.*

3. *La familia L tiene al menos un elemento distinto del polinomio cero.*

4. *Existe un único polinomio en L mónico (es decir, cuyo coeficiente principal es uno) de grado mínimo. Dicho polinomio se llama el* ***polinomio minimal*** *(o también* ***polinomio mínimo****) de T.*

5. *El polinomio minimal de T divide a cualquier otro polinomio que anule a T.*

6. *Sea A la matriz que representa a T con respecto a alguna base de V. Para cualquier polinomio $f(x)$ con coeficientes en F, $f(A)$ es la matriz cero si y sólo si $f(T)$ es el operador cero. En particular, el polinomio minimal de T es el polinomio mónico de menor grado que anula a A, y se le llama también el polinomio minimal de la matriz A.*

Demostración: Las dos primeras partes se tienen porque suma de ceros es cero, y producto del operador cero por cualquier operador es cero. Como V es de dimensión finita n, entonces los operadores $1, T, T^2, \ldots, T^n$ deben ser linealmente dependientes, y alguna combinación no trivial de ellos define un polinomio no nulo que anula a T. La existencia de un polinomio en L de grado mínimo se sigue de que los grados son enteros positivos, y este conjunto está bien ordenado (cualquier subconjunto no vacío tiene un primer elemento); la unicidad de dicho polinomio y la propiedad de dividir a los demás elementos de L se sigue del algoritmo de la división, pues si f es el de grado menor en L y g es cualquier otro polinomio en L, existen polinomios q y r tales que $g = fq + r$. Despejando vemos que r está en L por lo anterior, y como f es de grado menor, se debe tener que r es cero. La última parte se sigue de que la matriz asociada a una composición es el producto de las matrices respectivas, y que la matriz asociada a un operador es la matriz cero si y solamente si el operador es cero. $\square$

1.5. Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 16. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Entonces el polinomio característico de T y el polinomio minimal de T tienen las mismas raíces.*

Demostración: Sea p el polinomio minimal de T, y sea c un escalar. Por demostrar que $p(c) = 0$ si y solamente si c es un valor propio de T. Supongamos que $p(c) = 0$. Escribamos $p = (x - c)q$ con q un polinomio de grado menor que el de p; por la definición del polinomio minimal, $q(T) \neq 0$, por lo que existe un vector v en V tal que $w = q(T)(v) \neq 0$. Tenemos que $0 = p(T)(v) = (T - cI)q(T)(v) = (T - cI)(w)$ por lo que w es un vector propio de T con valor propio c. Supongamos ahora que c es un valor propio de T con vector propio v. Tenemos $p(T)(v) = p(c)v$. Como p anula a T, entonces esta última expresión debe ser el vector cero, por lo que $p(c)$ debe ser el escalar cero. □

Corolario 17. *Sea A una matriz cuadrada con entradas en un campo F. Entonces el polinomio característico de A y el polinomio minimal de A tienen las mismas raíces.*

Demostración: Se sigue del Teorema anterior, usando a la transformación asociada a la matriz con respecto a la base canónica en F^n. □

Teorema 18. *(Cayley-Hamilton) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Entonces el polinomio característico de T anula a T. Dicho de otra manera, el polinomio característico de T es un múltiplo del polinomio minimal de T.*

Demostración: Sea K el anillo de polinomios en T con coeficientes en el campo F. Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una base ordenada para V, y sea A la matriz asociada a T con dicha base. Tenemos que para toda i,

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j.$$

Equivalentemente, podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}T - A_{ji}I)\alpha_j = 0, \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Sea B la matriz de n por n dada por $B_{ij} = \delta_{ij}T - A_{ji}I$ (note que las entradas de B son polinomios en T, es decir, elementos de K). Sea f el polinomio característico de T. Note que el determinante de B es $f(T)$, puesto que $f(x)$ es el determinante de la matriz $xI - A$, y $f(T)$ es dicho determinante evaluando $x = T$. Hay que demostrar que $\det B$ es el operador cero. Es suficiente demostrar que $(\det B)\alpha_k = 0$ para toda k. Por la definición de B, los vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfacen las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j = 0, \qquad 1eqi \leq n.$$

Sea $C = \text{adj } B$. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ki}B_{ij}\alpha_j = 0$$

para todos k e i, y sumando sobre i tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ki}b_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} C_{ki}B_{ij}\right)\alpha_j$$

Puesto que $CB = (\det B)I$, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ki}B_{ij} = \delta_{kj}\det B,$$

de donde

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}(\det B)\alpha_j = (\det B)\alpha_k, \qquad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\square$

1.6. Subespacios invariantes

Definición 19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Sea W un subespacio de V. Decimos que W es **invariante** bajo T (o también invariante por T, o **estable** bajo T), si para todo vector v de W, se tiene que $T(v)$ también está en el subespacio W.

Teorema 20. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Considere un subespacio W de V invariante bajo T. Tenemos que*

1. *La restricción de T a W está bien definida y es un operador lineal en W, denotado $T|_W$.*
2. *El polinomio característico de $T|_W$ divide al polinomio característico de T.*
3. *El polinomio minimal de $T|_W$ divide al polinomio minimal de T.*

Demostración: Ejercicio. □

1.7. Conductores y anuladores

Definición 21. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Sea W un subespacio invariante bajo T, y sea v un vector cualquiera en V. El T**-conductor** de v en W es el conjunto que consta de todos los polinomios $f(x)$ con coeficientes en el campo F tales que $f(T)(v)$ está en W. El T-conductor de v en el subespacio cero de V se llama el T**-anulador** de v.

Teorema 22. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, T un operador lineal en V, W un subespacio de V invariante bajo T, y v un vector cualquiera en V. Tenemos que:*

1. *El subespacio W es invariante bajo cualquier polinomio en T.*
2. *El T-conductor de v en W es cerrado bajo sumas, es decir, si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios en el T-conductor de v en W, entonces $f(x)+g(x)$ está en el T-conductor de v en W.*
3. *El T-conductor de v en W absorbe productos por polinomios arbitrarios, es decir, si $f(x)$ es un polinomio en el T-conductor de v en W y $g(x)$ es un polinomio cualquiera con coeficientes en F, entonces $f(x)g(x)$ está en el T-conductor de v en W.*
4. *Existe un único polinomio mónico en el T-conductor de v en W de grado mínimo, llamado también el T-conductor de v en W (el T-anulador*

si W es el subespacio cero). Este polinomio divide a cualquier polinomio en el T-conductor de v en W, y en particular, divide al polinomio minimal de T.

Demostración: Como W es invariante bajo T, entonces W es invariante bajo $T \circ T = T^2$, y bajo cualquier composición T^n, así como bajo cualquier suma de ellas, es decir, cualquier polinomio en T. Si $f(T)(v)$ y $g(T)(v)$ están en W, también lo está su suma, y por la primera parte, también está $h(T)(f(T)(v))$. La última parte se sigue de manera análoga que en el Teorema 15, donde se construye el polinomio minimal de T.

□

1.8. Triangulabilidad

Definición 23. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Decimos que T es **triangulable** si existe una base ordenada de V con respecto a la cual la matriz de T es triangular superior.

Lema 24. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, T un operador lineal en V, y W un subespacio propio de V invariante bajo T. Suponga que el polinomio minimal de T se factoriza totalmente sobre F como producto de factores lineales no necesariamente distintos, es decir, puede tener raíces múltiples. Entonces existe un vector v en V que no pertenece a W, pero tal que $T(v) - cv$ está en W para algún valor propio c de T.*

Demostración: Ejercicio. □

Teorema 25. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y T un operador lineal en V. Tenemos que T es triangulable si y sólo si el polinomio minimal de T se factoriza totalmente sobre F como producto de factores lineales (no necesariamente distintos).*

Demostración: Si T es triangulable entonces el polinomio característico de T se factoriza totalmente sobre el campo como producto de factores lineales. Por el Teorema de Cayley-Hamilton, el polinomio minimal de T divide al polinomio característico y por lo tanto se factoriza como producto de factores lineales.

Suponga ahora que el polinomio minimal de T se puede factorizar como producto de factores lineales sobre el campo. Aplicando el Lema anterior para el subespacio $W_0 = \{0\}$ construimos un vector v_1 que es vector propio de T. Tome $W_1 =< v_1 >$ y aplique el lema para obtener un vector v_2 tal que $T(v_2) \in < v_1, v_2 >$; haga $W_2 =< v_1, v_2 >$ y vuelva a aplicar el Lema para obtener v_3. Continuando de esta forma obtenemos una base $v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $T(v_i)$ es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_i$, es decir, la matriz asociada a T con respecto a esta base es una matriz triangular superior. □

Corolario 26. *Sea F un campo algebraicamente cerrado (es decir, en donde todo polinomio no constante se factoriza totalmente como producto de factores lineales, no necesariamente distintos), y sea A una matriz cuadrada con entradas en F. Entonces A es semejante a una matriz triangular superior.*

Demostración: Se sigue de que el polinomio minimal se factoriza totalmente sobre el campo. □

Teorema 27. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y T un operador lineal en V. Tenemos que T es diagonalizable si y sólo si el polinomio minimal de T se factoriza totalmente sobre F como producto de factores lineales distintos.*

Demostración: Si T es diagonalizable, es un Ejercicio demostrar que el polinomio minimal de T es el producto $\prod(x - c)$ donde la c corre sobre todos los valores propios de T. Suponga ahora que el polinomio minimal de T es el producto $\prod(x-c)$ donde la c corre sobre todos los valores propios de T. Sea W el subespacio generado por todos los vectores propios de T, y suponga que W no es V. Por el Lema 24, existe un vector v que no está en W y un valor propio c_j de T tal que el vector $u = (T-c_jI)(v)$ está en W, por lo que se puede escribir como una suma $u = u_1 + \cdots + u_k$ donde $T(u_i) = c_i u_i$ para toda i. Se tiene que para cualquier polinomio h, $h(T)(u) = h(c_1)u_1 + \cdots + h(c_k)u_k$ está en W. Escribamos al polinomio minimal de T como $p = (x - c_j)q$, y hagamos $q - q(c_j) = (x-c_j)h$. Note que $q(T)(v) - q(c_j)v = h(T)(T-c_jI)(v) = h(T)(u)$. Pero $h(T)(u)$ está en W, y como

$$0 = p(T)(v) = (T - c_jI)q(T)(v)$$

se sigue que el vector $q(T)(v)$ está en W. Por lo tanto, $q(c_j)v$ está en W, y como v no está en W, se debe tener que $q(c_j) = 0$, contradiciendo el hecho de que p tiene raíces distintas. □

1.9. Diagonalización simultánea y triangulación simultánea

Definición 28. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea $\mathcal{F}$ una familia de operadores lineales en V. Sea W un subespacio de V. Decimos que W es **invariante bajo la familia** $\mathcal{F}$ si para todo T en $\mathcal{F}$ se tiene que W es invariante bajo T.

Lema 29. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, $\mathcal{F}$ una familia de operadores lineales triangulables en V que conmutan entre sí, y W un subespacio propio de V invariante bajo la familia $\mathcal{F}$. Entonces existe un vector v en V que no pertenece a W, pero tal que para todo T en $\mathcal{F}$, $T(v)$ está en el subespacio generado por v y W.*

Demostración: Ejercicio. □

Teorema 30. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y $\mathcal{F}$ una familia de operadores lineales triangulables en V que conmutan entre sí. Entonces existe una base ordenada de V tal que todo operador de $\mathcal{F}$ está representado por una matriz triangular superior en esa base.*

Demostración: La demostración es análoga a la de la versión para un operador. Hagamos $W_0 = \{0\}$; por el Lema anterior, existe un vector v_1 que no es cero y tal que $T(v_1) \in < v_1 >$ para todo T en $\mathcal{F}$. Haga $W_1 =< v_1 >$; por el Lema existe $v_2 \notin W_1$ tal que $T(v_2) \in < v_1, v_2 >$ para todo T en $\mathcal{F}$. Continuando inductivamente contruimos la base deseada. □

Corolario 31. *Sean F un campo algebraicamente cerrado, n un número entero positivo, y $\mathcal{A}$ una familia de matrices de n por n con entradas en F que conmutan entre sí. Entonces existe una matriz invertible P de n por n con entradas en F, tal que para toda matriz A en $\mathcal{A}$, se tiene que $P^{-1}AP$ es triangular superior.*

Demostración: Se sigue del Teorema anterior para la familia correspondiente de operadores asociados a las matrices, que son triangulables por tratarse de un campo algebraicamente cerrado. □

Teorema 32. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y $\mathcal{F}$ una familia de operadores lineales diagonalizables en V que conmutan entre sí. Entonces existe una base ordenada de V tal que todo operador de $\mathcal{F}$ está representado en dicha base por una matriz diagonal.*

Demostración: Procedamos por inducción sobre la dimensión de V. El caso de dimensión 1 es claro. Supongamos que el teorema es válido para espacios vectoriales de dimensión menor que n y sea V un espacio vectorial de dimensión n. Elija cualquier T en $\mathcal{F}$ que no sea un múltiplo escalar de la identidad (de no haberlo, cualquier base funcinaría). Sean $c_1, \ldots, c_k$ los valores propios distintos de T, y sea W_i el espacio nulo de $(T - c_i I)$ para cada i. Fijemos un índice i. Note que W_i es invariante bajo cualquier operador que conmute con T. Sea F_i la familia de operadores lineales en W_i que son las restricciones de los operadores en $\mathcal{F}$. Como los polinomios minimales de las restricciones son divisores de los polinomios minimales originales, tenemos que los operadores de F_i son todos diagonalizables, y como W_i es de dimensión menor, podemos diagonalizar todos los operadores restricciones en W_i escogiendo una base apropiada β_i. La unión de todas las β_i produce la base deseada de V. $\square$

1.10. Sumas directas de subespacios

Definición 33. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sean $W_1, \ldots, W_k$ una familia finita de subespacios de V. Decimos que $W_1, \ldots, W_k$ son **subespacios dependientes** si existen $v_1, \ldots, v_k$ vectores no todos nulos, con v_i en W_i, y tales que $v_1 + \cdots + v_k$ es igual al vector cero. Si los subespacios $W_1, \ldots, W_k$ no son dependientes, decimos que son **subespacios independientes**. Si $W_1, \ldots, W_k$ son subespacios independientes y W es el subespacio generado por todos los $W_1, \ldots, W_k$, decimos que W es la **suma directa** de $W_1, \ldots, W_k$, y lo denotamos

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \qquad \text{o bien} \qquad W = \oplus_{i=1}^{k} W_i.$$

Proposición 34. *Sea V un espacio vectorial, y sean W y Z subespacios de V. Entonces $V = W \oplus Z$ si y solamente si para todo v en V existen vectores* ***únicos*** *w en W y z en Z tales que $v = w + z$.*

Demostración: Ejercicio. $\square$

Teorema 35. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, $W_1, \ldots, W_k$ una familia finita de subespacios de V, y W el subespacios generado por $W_1, \ldots, W_k$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Los subespacios $W_1, \ldots, W_k$ son independientes.*

2. *Para cualquier índice i mayor que 2, la intersección de W_i con la suma de los subespacios anteriores a él es el subespacio cero.*

3. *Si se escoge una base ordenada cualquiera de cada W_i, la yuxtaposición de todas estas bases ordenadas forma una base ordenada de W.*

4. *Para todo v en V existen vectores únicos w_i en W_i tales que $v = w_1 + \cdots + w_k$.*

Demostración: Ejercicio. □

1.11. Proyecciones

Definición 36. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F. Una **proyección** de V es un operador lineal E en V tal que E compuesto consigo mismo es otra vez igual a E. Decimos que dos operadores lineales en V son **ortogonales** si sus dos posibles composiciones son cero. Si $T_1, \ldots, T_k$ son operadores lineales, se dice que son ortogonales si cada dos operadores distintos son ortogonales.

Teorema 37. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, W y Z subespacios de V tales que V es la suma directa de W y Z. Entonces existe una única proyección en V cuya imagen es W y cuyo núcleo es Z, llamada la **proyección sobre** W **paralelamente a** Z (o también **proyección sobre** W **según** Z).*

Demostración: Sea E el operador en V dado de la siguiente forma: para cada v en V, considere los únicos vectores w en W y z en Z tales que $v = w + z$, y defina $E(v) = w$. E está bien definida por la unicidad de los vectores w y z, y es transformación lineal porque si $v_1 = w_1 + z_1$ y $v_2 = w_2 + z_2$, entonces $v_1 + av_2 = (w_1 + aw_2) + (z_1 + az_2)$ es la descomposición apropiada para esa combinación lineal. Tenemos también que $E(v) = v$ si y solamente si $z = 0$, que ocurre si y solamente si $v \in W$, (por lo que $E(E(v)) = E(v)$, es decir, E es una proyección con imagen W), y que $E(v) = 0$ si y solamente si $w = 0$, que ocurre si y solamente si $v \in Z$. □

Teorema 38. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, $W_1, \ldots, W_k$ una sucesión finita de subespacios de V tales que $V = \oplus_{i=1}^{k} W_i$. Entonces existe una sucesión $E_1, \ldots, E_k$ de proyecciones ortogonales tales* *que la identidad de V es la suma de todas estas proyecciones, y la imagen de E_i es W_i. Recíprocamente, si se tiene una sucesión finita de proyecciones ortogonales cuya suma es la identidad de V, entonces V es la suma directa de las imágenes de dichas proyecciones.*

Sea además T un operador lineal en V. Entonces todos los W_i son subespacios invariantes bajo T si y sólo si T conmuta con todas las proyecciones E_i.

Demostración: Ejercicio. □

Teorema 39. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y T un operador lineal en V. Si T es diagonalizable y $c_1, \ldots, c_k$ son los valores propios distintos de T, entonces existen proyecciones ortogonales $E_1, \ldots, E_k$ tales que su suma es la identidad de V, sus imágenes son los espacios propios de T asociados a los respectivos valores propios, y $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$.*

Recíprocamente, si existen escalares distintos $c_1, \ldots, c_k$ y operadores lineales no nulos $E_1, \ldots, E_k$ tales que la suma de todos los operadores es la identidad de V, dos operadores distintos cualesquiera son ortogonales, y $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$, entonces T es diagonalizable, los $c_1, \ldots, c_k$ son todos los valores propios distintos de T, todos los operadores $E_1, \ldots, E_k$ son proyecciones, y la imagen de cada una de estas proyecciones es el espacio propio asociado al correspondiente valor propio.

Demostración: Sean W_i los espacios propios asociados a los c_i. Si T es diagonalizable, entonces V es la suma directa de los W_i. Defina E_i como la proyección sobre W_i según esta suma directa. Lo único que hay que demostrar es que $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$, lo que se comprueba fácilmente en cualquier base de vectores propios de T.

Ahora suponga que existen escalares distintos $c_1, \ldots, c_k$ y operadores lineales no nulos $E_1, \ldots, E_k$ tales que la suma de todos los operadores es la identidad de V, dos operadores distintos cualesquiera son ortogonales, y haga $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$. Note que los operadores E_i son proyecciones, pues $E_i = E_i \circ I = E_i \circ (E_1 + \cdots + E_k) = E_i \circ E_1 + \cdots + E_1 \circ E_k = E_i \circ E_i$ (por la ortogonalidad). Haciendo $W_i = Im(E_i)$,, vemos que W_i es el subespacio propio de T asociado al valor propio c_i, y que yuxtaponiendo bases de los W_i obtenemos una base de V de vectores propios de T, por lo que T es diagonalizable y lo demás se sigue de la primera parte. □

1.12. Teorema de la descomposición prima

Teorema 40. *(Teorema de la descomposición prima) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, T un operador lineal en V, y p el polinomio minimal de T. Suponga que p se factoriza $p=p_1^{e_1}\dots p_k^{e_k}$, donde los p_i son polinomios irreducibles mónicos, y los e_i son enteros positivos. Sea W_i el espacio nulo de $p_i(T)^{e_i}$ para cada posible índice i. Entonces V es la suma directa de los W_i, cada W_i es invariante bajo T, y si T_i es el operador inducido por T en W_i, entonces el polinomio mínimo de T_i es $p_i^{e_i}$.*

Demostración: Una demostración del Teorema de la descomposición prima va más allá de un curso introductorio de Algebra Lineal de Licenciatura. El lector interesado puede hallar una demostración en [3], Capítulo 6, Sección 8. □

1.13. Ejercicios del Capítulo.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 41. Para cada una de las siguientes matrices sobre los reales, encuentre el polinomio característico, el polinomio minimal, valores propios y vectores propios, y una base para cada espacio característico. Determine si cada matriz es o no triangulable y/o diagonalizable.

1. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

3. $$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. $$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.
$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6.
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8.
$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 42. Repita el Ejercicio anterior ahora sobre los complejos.

Ejercicio 43. Encuentre un ejemplo de un operador T en un espacio V con un subespacio T-invariante W y vector v en V tales que el polinomio T-conductor de v en W, el polinomio T-anulador de v, el polinomio minimal de T y el polinomio característico de T sean todos diferentes. Justifique su respuesta.

Ejercicio 44. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $(1,2,0,0,0), (2,2,0,0,2)$. Encuentre un subespacio Z de $\mathbb{R}^5$ tal que $\mathbb{R}^5 = W \oplus Z$.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 45. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, W y Z subespacios de V tales que $V = W \oplus Z$. Entonces $W \cap Z = \{0\}$.

Ejercicio 46. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y W un subespacio de V. Entonces existe un único subespacio Z de V tal que $V = W \oplus Z$.

Ejercicio 47. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y W un subespacio de V. Sea $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ una base de V. Entonces existe un subconjunto S de la base β tal que el subespacio Z generado por S es tal que $V = W \oplus Z$.

Ejercicio 48. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y W un subespacio de V. Sean Z y Y subespacios de V tales que $V = W \oplus Z$ y $V = W \oplus Y$. Entonces $Z = Y$.

Ejercicio 49. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y W un subespacio de V. Sean Z y Y subespacios de V tales que $V = W \oplus Z$ y $V = W \oplus Y$. Entonces Z y Y tienen la misma dimensión.

Ejercicio 50. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y W un subespacio de V. Sean Z y Y subespacios de V tales que $V = W \oplus Z$ y Z y Y tienen la misma dimensión. Entonces $V = W \oplus Y$.

Ejercicio 51. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y W un subespacio de V. Sean Z y Y subespacios de V tales que $V = W \oplus Z$ y $V = W \oplus Y$. Entonces $Z \cap Y = \{0\}$.

Ejercicio 52. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sean W y Z subespacios de V tales que $V = W + Z$. Si además tenemos que $W \cap Z = \{0\}$, entonces $V = W \oplus Z$.

Ejercicio 53. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, k un entero mayor que uno, y sean $W_1, \ldots, W_k$ subespacios de V tales que $V = W_1 + \cdots + W_k$. Si además tenemos que $W_1 \cap \cdots \cap W_k = \{0\}$, entonces $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

Demostraciones.

Ejercicio 54. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita tal que $T(v) = cv$ para un vector v en V y un escalar c. Si $f(x)$ es un polinomio con escalares en el campo, entonces $f(T)(v) = f(c)v$.

Ejercicio 55. Sea T un operador lineal sobre un espacio V de dimensión finita, sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores propios (no nulos) de T con valores propios diferentes. Entonces $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes.

Ejercicio 56. Sean A y B matrices diagonales de n por n. Demuestre que AB es la matriz diagonal dada por $(AB)_{ii} = A_{ii}B_{ii}$.

Ejercicio 57. Sea T un operador lineal diagonalizable sobre un espacio vectorial de dimensión finita. Demuestre que el polinomio minimal de T es el producto $\prod(x-c)$ donde la c corre sobre todos los valores propios de T.

Ejercicio 58. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, T un operador lineal en V, y W un subespacio de V invariante bajo T. Sea β una base de W, y sea γ una extensión de β a una base de V. Entonces la matriz asociada a T con respecto a la base γ se puede escribir de la forma

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

donde B es la matriz de la restricción de T a W con respecto a la base β, y 0 representa una matriz cero de dimensiones apropiadas.

Ejercicio 59. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Considere un subespacio W de V invariante bajo T. Demuestre que

1. La restricción de T a W está bien definida y es un operador lineal en W, denotado $T|_W$.
2. El polinomio característico de $T|_W$divide al polinomio característico de T.
3. El polinomio minimal de $T|_W$divide al polinomio minimal de T.

Ejercicio 60. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, y sea T un operador lineal en V. Sea W un subespacio invariante bajo T, y sea v un vector cualquiera en V. Demuestre que el polinomio T-conductor de v en W divide al polinomio minimal de T.

Ejercicio 61. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, T un operador lineal en V, y W un subespacio propio de V invariante bajo T. Suponga que el polinomio minimal de T se factoriza totalmente sobre F como producto de factores lineales no necesariamente distintos, es decir, puede tener raíces múltiples.

1. Sea u cualquier vector en V que no esté en W, y sea g el T-conductor de u en W. Demuestre que existe una raíz c del polinomio minimal de T tal que $g=(x-c)h$.

2. Sean u y h como en el inciso anterior. Demuestre que $h(T)(u)$ no está en W.

3. Demuestre que existe un vector v en V que no pertenece a W, pero tal que $T(v) - cv$ está en W para algún valor propio c de T.

Ejercicio 62. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, $\mathcal{F}$ una familia de operadores lineales triangulables en V que conmutan entre sí, y W un subespacio propio de V invariante bajo la familia $\mathcal{F}$.

1. Demuestre que existe un número finito de operadores $T - 1, \ldots, T_r$ que generan a cualquier elemento de la familia $\mathcal{F}$, es decir, cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es combinación lineal de estos generadores.

2. Demuestre que existe un vector v_1 que no pertenece a W, y un escalar c_1 tal que $(T_1 - c_1 I)(v_1)$ está en W.

3. Demuestre que existe un subespacio V_1 de V que contiene a W propiamente, que es invariante para la familia $\mathcal{F}$.

4. Demuestre que existe un vector v_2 en V_1 que no está en W y un escalar c_2 tal que $(T_2 - c_2 I)(v_2)$ está en W.

5. Demuestre que existe un vector v en V que no pertenece a W, pero tal que para todo T en $\mathcal{F}$, $T(v)$ está en el subespacio generado por v y W.

Ejercicio 63. Sea V un espacio vectorial, y sean W y Z subespacios de V. Entonces $V = W \oplus Z$ si y solamente si para todo v en V existen vectores **únicos** w en W y z en Z tales que $v = w + z$.

Ejercicio 64. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, $W_1, \ldots, W_k$ una familia finita de subespacios de V, y W el subespacios generado por $W_1, \ldots, W_k$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Los subespacios $W_1, \ldots, W_k$ son independientes.

2. Para cualquier índice i mayor que 2, la intersección de W_i con la suma de los subespacios anteriores a él es el subespacio cero.

3. Si se escoge una base ordenada cualquiera de cada W_i, la yuxtaposición de todas estas bases ordenadas forma una base ordenada de W.

Ejercicio 65. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F, $W_1, \ldots, W_k$ una sucesión finita de subespacios de V tales que $V = \oplus_{i=1}^{k} W_i$. Entonces existe una sucesión $E_1, \ldots, E_k$ de proyecciones ortogonales tales que la identidad de V es la suma de todas estas proyecciones, y la imagen de E_i es W_i. Recíprocamente, si se tiene una sucesión finita de proyecciones ortogonales cuya suma es la identidad de V, entonces V es la suma directa de las imágenes de dichas proyecciones.

Sea además T un operador lineal en V. Entonces todos los W_i son subespacios invariantes bajo T si y sólo si T conmuta con todas las proyecciones E_i.

Capítulo 2

Formas Canónicas Racional y de Jordan.

A lo largo de este capítulo, V denotará un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F, T un operador lineal en V, y v un vector en V.

2.1. Subespacios cíclicos.

Definición 66. El **subespacio T-cíclico** generado por v es el subespacio $Z(v;T)$ de los vectores de la forma $g(T)(v)$, con g polinomio con coeficientes en F. Si $Z(v;T) = V$, entonces decimos que v es un **vector cíclico** de T.

Ejemplo 67. El operador dado por la matriz real

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene como vector cíclico a (0,1), pues su imagen es (1,0) y juntos generan a $\mathbb{R}^2$.

2.2. Polinomios anuladores.

Definición 68. Sea F un campo. Denotamos por $F[x]$ al anillo conmutativo de los polinomios con coeficientes en F. Un **ideal** I en $F[x]$ es un subconjunto de polinomios que contiene al polinomio cero, es cerrado bajo sumas y absorbe productos (es decir, si $f \in I$ y $g \in F[x]$, entonces $fg \in I$).

Ejemplo 69. El conjunto $\{0\}$ es un ideal de $F[x]$, llamado el **ideal cero**.

Ejemplo 70. El propio $F[x]$ es un ideal.

Ejemplo 71. El conjunto de todos los polinomios en $F[x]$ con término constante cero es un ideal.

Teorema 72. *Sea I un ideal de $F[x]$. Entonces existe un único polinomio mónico f en I de grado mínimo tal que I es el conjunto $\{fg \mid g \in F[x]\}$. A dicho polinomio se le llama **generador del ideal** I.*

Demostración: Ejercicio. $\square$

Definición 73. El T**-anulador** de v es el ideal $M(v;T)$ en $F[x]$ que consta de todos los polinomios g en $F[x]$ tales que $g(T)(v) = 0$. Al polinomio mónico que genera este ideal se le llama también el T-anulador de v.

Teorema 74. *Sea p_v el T anulador de v. Se tiene:*

1. *El grado de p_v es igual a la dimensión del subespacio cíclico $Z(v;T)$.*

2. *Si el grado de p_v es k, entonces los vectores $v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)$ forman una base de $Z(v;T)$.*

3. *Si U es el operador lineal en $Z(v;T)$ inducido por T, entonces el polinomio minimal de U es p_v.*

Demostración: Sea g un polinomio sobre F. Por el algoritmo de la división para polinomios, tenemos que $g = p_v q + r$ donde $r = 0$ o r es un polinomio de grado estrictamente menor que k. Como el polinomio $p_v q$ está en el T-anulador de v, tenemos que $g(T)(v) = r(T)(v)$. Puesto que $r = 0$ o r es de grado menor que k, tenemos que $r(T)(v)$ es combinación lineal de los vectores $v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)$, por lo que estos vectores generan a $Z(v;T)$.

Si dichos vectores no fueran linealmente independientes, habría una combinación lineal de ellos que da el vector cero, lo que daría un polinomio g no nulo tal que $g(T)(v) = 0$, y como el grado de g es menor que k, esto contradiría la construcción de p_v.

Finalmente, sea U la restricción de T a $Z(v;T)$. Si g es cualquier polinomio con coeficientes en F, entonces

$$p_v(U)g(T)(v) = p_v(T)g(T)(v) = g(T)p_v(T)(v) = g(T)(0) = 0$$

por lo que $p_v(U)$ evaluado en cada vector de $Z(v;T)$ vale 0, y p_v es un múltiplo del polinomio minimal de U. Por otro lado, si h es un polinomio de grado menor que k, no se puede dar que $h(U)$ sea el operador cero, pues de ser así tendríamos que $h(U)(v) = h(T)(v) = 0$ contradice la minimalidad de p_v, lo que demuestre que p_v es el polinomio minimal de U. $\square$

2.3. Matriz compañera.

Definición 75. Sea $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1}x^{k-1} + x^k$ un polinomio mónico sobre F de grado k. La **matriz compañera** de p (o también la **matriz asociada** al polinomio mónico p) es la matriz de k por k con entradas en F dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

Proposición 76. *Sea U un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita W. Entonces U tiene un vector cíclico si y solamente si existe una base ordenada de W en la que U está representado por la matriz compañera de su polinomio minimal p.*

Demostración: Si v es un vector cíclico de U, sabemos que $v, U(v), U^2(v), \dots, U^{k-1}$ es una base de W, y la matriz asociada a U con respecto a esta base es justamente la matriz compañera de p. Por otro lado, si existe una base que representa a U por medio de la matriz compañera de p, entonces el primer vector de dicha base es un vector cíclico para U. $\square$

Corolario 77. *Si A es la matriz compañera de un polinomio mónico p, entonces p es el polinomio minimal y el polinomio característico de A.*

Demostración: Sea U el operador lineal asociado a A. Como U tiene un vector cíclico, el polinomio minimal de U es de grado k, que es el grado del polinomio característico (pues la matriz A es de k por k), y por el Teorema de Cayley-Hamilton, dichos polinomios coinciden. El resto se sigue de que p es un polinomio mónico de grado k que anula a A, y debe ser por tanto el polinomio minimal. $\square$

2.4. Descomposición cíclica.

Definición 78. Sea T un operador lineal sobre un espacio V y sea W un subespacio de V. Se dice que W es T**-admisible** si

- W es invariante bajo T, y
- para todo polinomio $f(x)$ y para todo vector v tales que $f(T)(v)$ está en W, existe un vector w en W tal que $f(T)(v) = f(T)(w)$.

Teorema 79. *(Teorema de la descomposición cíclica) Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V y sea W_0 un subespacio propio T-admisible de V. Existen vectores no nulos $v_1, \ldots, v_r$ en V con T-anuladores respectivos $p_1, \ldots, p_r$ tales que*

1. $V = W_0 \oplus Z(v_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(v_r; T)$;
2. p_k *divide a* p_{k-1}, $k = 2, \ldots, r$.

Más aún, el entero r y los anuladores $p_1, \ldots, p_r$ están unívocamente determinados por las dos propiedades anteriores y el hecho de que ninguno de los v_k es cero.

Demostración: La demostración del teorema de la descomposición cíclica va más allá de este curso, pero el lector interesado la puede encontrar en [3]. □

Corolario 80. *Si T es un operador lineal sobre un espacio vectoria de dimensión finita, entonces todo subespacio T-admisible tiene un subespacio complementario que es también invariante por T.*

Demostración: Ejercicio. □

Corolario 81. *Sea T un operador lineal sobre V de dimensión finita.*

- *Existe un vector v en V tal que el T-anulador de v es el polinomio minimal de T.*
- *T tiene un vector cíclico si y solamente si los polinomios característico y minimal de T coinciden.*

Demostración: Ejercicio. □

2.5. Forma canónica racional y factores invariantes.

Definición 82. Sea A una matriz. Decimos que A es la **suma directa de las matrices** $A_1, \ldots, A_r$si

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_r \end{pmatrix}$$

Si además se cumple que cada A_i es la matriz compañera de un polinomio mónico p_i, y que p_{i+1} divide a p_i para $i = 1, \ldots, r-1$, se dice que la matriz A está en **forma racional**, y los polinomios $p_1, \ldots, p_r$ se llaman los **factores invariantes** de la matriz A.

Teorema 83. *Sea F un campo y sea B una matriz de n por n sobre F. Entonces B es semejante sobre F a una, y solamente a una, matriz que está en forma racional. Dicha matriz se llama la* ***forma canónica racional*** *de B. Los factores invariantes de B se definen como los factores invariantes de su forma canónica racional.*

Demostración: Sea T el operador lineal en F^n cuya matriz es B en la base canónica. Por lo visto para operadores, existe una base de F^n tal que la matriz asociada a T con respecto a esa base es una matriz A que está en su forma canónica racional, y por lo tanto B es semejante a A. Supongamos que existe otra matriz C en forma racional semejante a B. Esto implica que existe otra base en la que T está representado por la matriz C. Si C es suma directa de matrices C_i asociadas a polinomios mónicos $g_1, \ldots, g_s$tales que g_{i+1} divide a g_i para $i = 1, \ldots, s-1$, entonces se sigue que se tienen vectores no nulos $b_1, \ldots, b_s$en V con T-anuladores $g_1, \ldots, g_s$tales que

$$V = Z(b_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(b_s; T)$$

Por la unicidad del teorema de descomposición cíclica, los polinomios g_i son idénticos a los polinomios p_i, que definen a la matriz A, de donde $C = A$ y también se tiene la unicidad de la forma canónica racional. $\square$

2.6. Forma canónica de Jordan.

Definición 84. Sea c un escalar en el campo F. Una **matriz elemental de Jordan** (o también un **bloque de Jordan**) con valor propio c de tamaño n es una matriz de n por n de la forma

$$\begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & c & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz cuadrada. Supongamos que A que es la suma directa de matrices A_i, donde a su vez cada matriz A_i es la suma directa de bloques de Jordan $J_j(i)$, donde además cada $J_j(i)$ tiene valor propio c_i, y también se tiene que la dimensión de $J_{j+1}(i)$ es menor o igual a la dimensión de $J_j(i)$; entonces se dice que la matriz A está en **forma de Jordan** (algunos autores omiten la condición de que las dimensiones de los bloques con un mismo valor propio decrezcan).

Teorema 85. *Sea V un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un campo F. Supongamos que el polinomio característico de T se factoriza totalmente sobre F como producto de factores lineales (posiblemente con multiplicidades). Entonces existe una base de V con respecto a la cual la matriz asociada a T está en forma de Jordan. Dicha forma de Jordan es única salvo el orden de los bloques de Jordan.*

Demostración: Considere la descomposción de V inducida al considerar la forma canónica racional de T, y sean $p_1, \dots, p_r$los factores invariantes de T. Puesto que los factores invariantes se van dividiendo, para la existencia de la forma canónica de Jordan de T basta con demostrar que la matriz compañera de un polinomio mónico que se factoriza totalmente sobre F se puede escribir como suma directa de bloques de Jordan con distintos valores propios (Ejercicio). La unicidad (salvo el orden de los bloques de Jordan) se sigue de que la dimensión de un bloque de Jordan con valor propio c_i es precisamente la multiplicidad del valor propio c_i en el factor invariante de donde surgió el bloque de Jordan, y los factores invariantes están determinados de manera única. $\square$

Corolario 86. *Sea A una matriz de n por n con entradas en un campo F. Entonces existe una matriz en forma de Jordan semejante a A, y dicha* *matriz es única salvo el orden de los bloques de Jordan. A tal matriz se le llama la* ***forma canónica de Jordan*** *de la matriz A.*

Demostración: Ejercicio. □

2.7. Aplicación de la forma canónica de Jordan a las Ecuaciones Diferenciales.

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ y considere la ecuación diferencial lineal con coeficientes complejos constantes inducida por $p(x)$, es decir,

$$a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{n-1} f^{(n-1)} + f^{(n)}$$

Sea V el espacio de todas las funciones n-diferenciables en un intervalo real que cumplen dicha ecuación diferencial. Sea D el operador derivación. Entonces V es el espacio nulo del operador $p(D)$, y por lo tanto V es invariante bajo D. Considere la factorización $p(x) = p(x) = (x - c_1)^{e_1} \ldots (x - c_k)^{e_k}$. Note que la dimensión del espacio propio de c es uno, pues la solución de la ecuación diferencial $D(f) = cf$ consta de los múltiplos escalares de la función e^{cx}. Entonces la forma canónica de Jordan de D en V es suma directa de k matrices elementales de Jordan, una por cada raíz c_i.

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 87. Para cada una de las siguientes matrices, encuentre el polinomio característico, el polinomio mínimo, los valores propios, los factores invariantes, la forma canónica racional y la forma canónica de Jordan.

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

6.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 88. Todo operador T tiene al menos un vector cíclico v en V.

Ejercicio 89. Sea A una matriz de n por n sobre $\mathbb{C}$. Si todo valor propio de A es real, entonces A es semejante sobre $\mathbb{C}$ a una matriz de entradas reales.

Ejercicio 90. Sea A una matriz de n por n sobre $\mathbb{C}$. Si todo valor propio de A es real, entonces A es semejante sobre $\mathbb{R}$ a una matriz de entradas reales.

Ejercicio 91. Sea A una matriz de n por n sobre $\mathbb{C}$. Si A es semejante sobre $\mathbb{C}$ a una matriz de entradas reales, entonces todo valor propio de A es real.

Demostraciones.

Ejercicio 92. Demuestre que $Z(v;T)$ es el subespacio de V generado por los vectores $T^k(v)$, k entero no negativo.

Ejercicio 93. Un vector v es un vector propio de T si y solamente si $Z(v;T)$ tiene dimensión uno.

Ejercicio 94. Sea I un ideal de $F[x]$. Entonces existe un único polinomio mónico f en I de grado mínimo tal que I es el conjunto $\{fg \mid g \in F[x]\}$. A dicho polinomio se le llama **generador del ideal** I. (Sugerencia: copie la demostración de la existencia y unicidad del polinomio minimal de un operador.)

Ejercicio 95. Sean T un operador en V y sea v en V. Entonces la restricción de T a $Z(v;T)$ tiene a v como vector cíclico. Además, dicha restricción está representada en alguna base por la matriz compañera del polinomio T-anulador de v.

Ejercicio 96. Sea T un operador en V, y suponga que $V = W \oplus Z$. Si W y Z son T-invariantes, entonces W y Z son T-admisibles.

Ejercicio 97. Sea T un operador lineal sobre V de dimensión finita.

- Existe un vector v en V tal que el T-anulador de v es el polinomio minimal de T.
- T tiene un vector cíclico si y solamente si los polinomios característico y minimal de T coinciden.

Ejercicio 98. Sea T un operador lineal nilpotente (es decir, tal que existe un entero positivo m tal que $T^m = 0$) en un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo algebraicamente cerrado. Demuestre que el polinomio característico de T es x^n.

Ejercicio 99. Sea F un campo arbitrario, y sea A una matriz de 2 por 2 sobre F. Demuestre que A es semejante sobre F exactamente a una matriz de los tipos

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

con a, b, c escalares en F.

Ejercicio 100. Sea F un subcampo de los complejos $\mathbb{C}$ y sea A una matriz de n por n sobre F. Demuestre que la forma canónica racional de A sobre F es la misma que la forma canónica racional de A sobre C.

Ejercicio 101. Sea F un subcampo de los complejos $\mathbb{C}$, y sean A y B matrices de n por n con entradas en F. Demuestre que A y B son semejantes sobre $\mathbb{C}$ si y solamente si son semejantes sobre F.

Ejercicio 102. Enuncie el Teorema de Cayley-Hamilton generalizado. (Sugerencia: consulte [3].)

Ejercicio 103. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F. Demuestre que el polinomio característico de T se factoriza totalmente sobre F si y solamente si el polinomio minimal de T se factoriza totalmente sobre F. (Sugerencia: Use el Teorema de Cayley-Hamilton generalizado.)

Ejercicio 104. Sea $p(x)$ un polinomio mónico sobre el campo F que se factoriza totalmente sobre F como producto de factores lineales, digamos $p(x) = (x - c_1)^{e_1} \dots (x - c_k)^{e_k}$. Demuestre que la matriz compañera de $p(x)$ es suma directa de bloques de Jordan $J_1(c_1), \dots, J_k(c_k)$, donde $J_i(c_i)$ es un bloque de tamaño e_i con valor propio c_i.

Ejercicio 105. Sea A una matriz de n por n con entradas en un campo F. Entonces existe una matriz en forma de Jordan semejante a A, y dicha matriz es única salvo el orden de los bloques de Jordan. A tal matriz se le llama la **forma canónica de Jordan** de la matriz A.

Capítulo 3

Espacios con producto interno.

3.1. Definición y ejemplos de espacios con producto interno.

Notación 106. En este capítulo, F denotará ya sea a los reales o a los complejos, y V denotará un F-espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 107. Un **producto interno** (o **producto interior**) sobre V es una función $(|) : V \times V \longrightarrow F$ tal que para cualesquiera v, u, w en V y cualquier escalar c en F se tiene:

1. $(v + u|w) = (v|w) + (u|w)$
2. $(cv|u) = c(v|u)$
3. $(u|v) = (\bar{v|}u)$ donde la barra denota conjugación compleja
4. $(v|v) > 0$ si v es no nulo.

Un **espacio con producto interno** es un espacio vectorial junto con un producto interno; si es sobre los reales, se llama un **espacio euclidiano**, y si es sobre los complejos, se llama un **espacio unitario**.

Ejemplo 108. En F^n, si $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $u = (y_1, \ldots, y_n)$, tenemos que

$$(v|u) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y_j}$$

es el producto interno canónico. Usualmente se representa $v \cdot u$, y se llama **producto punto** o **producto escalar**.

Ejemplo 109. Sea $V = Mat_{n\times n}(F)$. Definimos un producto interno en V por

$$(A|B) = tr(AB^*$$

donde $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ es la **traza** de la matriz A, y $(B^*)_{ij} = \bar{B_{ji}}$ es la matriz transpuesta conjugada de B. Note que este producto interno es el producto punto en $F^{(n^2)}$.

Ejemplo 110. Sea $V = Mat_{n\times 1}(F)$, y sea Q una matriz invertible de n por n sobre F. Defina para X, Y en V el producto interno

$$(X|Y) = Y^*Q^*QX$$

Ejemplo 111. Sea $V = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es contiua } \}$. Defina un producto interno en V por

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\bar{g(t)}dt$$

Definición 112. Sea $(|)$ un producto interno en V. La **norma** asociada al producto interno $(|)$ es la función $||\ ||: V \longrightarrow F$, dada por $||v|| = \sqrt{(v|v)}$. La **forma cuadrática** asociada a $(|)$ es la función $v \mapsto (v|v)$.

Ejemplo 113. En $\mathbb{R}^n$, $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{\sum x_i^2}$.

Ejemplo 114. En $\mathbb{C}^n$, $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$.

3.2. Bases ortogonales.

Definición 115. Sean v, u en V. Decimos que v es **ortogonal** a u (o que v y u son ortogonales) si $(v|u) = 0$. Sea S un subconjunto de V. Decimos que S es un **conjunto ortogonal** si cualesquiera dos vectores distintos en S son ortogonales. Decimos que S es un **conjunto ortonormal** si S es un conjunto ortogonal y además todo vector en S tiene norma igual a uno.

Ejemplo 116. La base canónica en F^n es ortonormal con respecto al producto canónico.

Lema 117. *Sea* $u = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m$ *con los* v_i *no nulos y ortogonales entre sí. Entonces* $c_k = (u|v_k)/||v_k||^2$ *para toda* k.

Demostración: Ejercicio. $\square$

Corolario 118. *Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.*

Demostración: Usando la notación del Lema, si $u = 0$, entonces $c_k = 0/||v_k||^2 = 0$ para toda k. $\square$

Teorema 119. *(Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea* V *un espacio con producto interno y sean* $u_1, \ldots, u_n$ *vectores linealmente independientes de* V*. Defina* $v_1 = u_1$*, e inductivamente*

$$v_{m+1} = u_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{(u_{m+1}|v_k)}{||v_k||^2} v_k$$

Entonces $v_1, \ldots, v_n$ *son vectores ortogonales no nulos, y generan el mismo subespacio que* $u_1, \ldots, u_n$.

Demostración: Inducción en k. El caso $k = 1$ es claro. Supongamos que vale para m vectores. Por demostrar que vale para $m+1$ vectores. El vector v_{m+1} es ortogonal a v_i (con $i < m + 1$), pues al hacer su producto interno solamente quedan dos términos no nulos que se cancelan. Los vectores $v_1, \ldots, v_{m+1}$ generan el mismo subespacio que los vectores $u_1, \ldots, u_{m+1}$, pues v_{m+1} y u_{m+1} difieren por un vector que es suma de vectores anteriores. $\square$

Corolario 120. *Todo espacio vectorial con producto interno de dimensión finita tiene una base ortonormal.*

Demostración: A partir de una base de V podemos construir, usando el teorema anterior, una base ortogonal. Dividiendo cada vector de esta base por su norma, obtendremos una base ortonormal. $\square$

3.3. Complemento ortogonal y proyecciones ortogonales.

Definición 121. Sea W un subespacio de V, y sea u un vector en V. Una **mejor aproximación** a u por vectores de W es un vector v en W tal que $||u - v|| \leq ||u - w||$ para cualquier vector w en W.

Ejemplo 122. Una mejor aproximación de (2,3) por el eje de las x es (2,0).

Teorema 123. *Sea W un subespacio de V, y u en V.*

1. *El vector v en W es una mejor aproximación a u por W si y solamente si $u - v$ es ortogonal a todo vector de W.*
2. *Si existe una mejor aproximación a u por W, es única.*
3. *Si W es de dimensión finita y $v_1, \ldots, v_n$ es una base ortogonal de W, entonces*
$$v = \sum_{k=1}^{n} \frac{(u|v_k)}{||v_k||^2} v_k$$
es la única mejor aproximación a u por elementos de W.

Demostración: Supongamos que v de W es una mejor aproximación a u por W. Sea w cualquier otro vector en W. Note que

$$||u - v||^2 = ||u - v||^2 + 2Re(u - v|v - w) + ||v - w||^2$$

Se sigue que
$$2Re(u - v|v - w) + ||v - w||^2 \geq 0$$
Como todo vector en W es de la forma $v - w$ con w en W, tenemos que

$$2Re(u - v|z) + ||z||^2 \geq 0$$

para todo z en W. En particular, si w está en W y es distinto de v, tenemos

$$z = -\frac{(u - v|v - w)}{||v - w||^2}(v - w)$$

La desigualdad se convierte en

$$-2\frac{|(u - v|v - w)|^2}{||v - ||w||^2} + \frac{|(u - v|v - w)|^2}{||v - w||^2} \geq 0$$

Esta desigualdad se cumple si y solamente si $(u - v|v - w) = 0$. Por lo tanto $u - v$ es ortogonal a todo vector en W. Supongamos ahora que $u - v$ es ortogonal a todo vector en W. Sea w un vector cualquiera en W distinto de v. Puesto que $v - w$ está en W, tenemos que

$$||u - v||^2 = ||u - v||^2 + ||v - w||^2 > ||u - v||^2$$

Note que la condición de ortogonalidad la puede satisfacer a lo más un vector de W, lo que demuestra la unicidad de la mejor aproximación. Finalmente, supongamos que W es un subespacio de dimensión finita de V, y sea $v_1, \ldots, v_n$ una base ortonormal de W. Definamos v como en el enunciado del teorema. Un cálculo directo nos muestra que $u - v$ es ortogonal a todos los v_i, y por lo tanto a todo vector en W. Por la primera parte del teorema, v es una mejor aproximación a u por W. $\square$

Definición 124. Sea V un espacio con producto interno y sea S cualquier conjunto de vectores en V. El **complemento ortogonal** de S es el conjunto $S^{\perp}$ de los vectores de V ortogonales a todo vector de S.

Ejemplo 125. El complemento ortogonal de V es el subespacio cero, pues el cero es el único vector de V ortogonal a sí mismo.

Ejemplo 126. El complemento ortogonal del subespacio cero es el espacio total V, pues todo vector es ortogonal al cero.

Teorema 127. *Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, y sea W un subespacio de V. Entonces*

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Demostración: Como el único vector de W ortogonal a sí mismo es el cero, tenemos que $W \cap W^{\perp} = 0$. Para demostrar que $V = W + W^{\perp}$, basta notar que todo vector u en V se escribe como $v + (u - v)$, donde v es la mejor aproximación a u por W, y $u - v$ está en el complemento ortogonal a W por un Teorema anterior. $\square$

3.4. El adjunto de un operador lineal.

Teorema 128. *Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, y sea f un funcional lineal en V. Entonces existe un único vector u en V tal que $f(v) = (v|u)$ para todo v en V.*

Demostración: Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base ortonormal de V. Defina $u = \sum f(\bar{v_j}) v_j$. Vemos que en la base dada u cumple con lo deseado, y por linealidad lo cumple para todo vector en V. La unicidad de u se sigue del Ejercicio 158. $\square$

Corolario 129. *Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, y sea T un operador lineal en V. Entonces existe un único operador lineal T^* en V tal que*

$$(Tv|u) = (v|T^*u)$$

para cualesquiera v, u en V. A dicho operador T^* se le llama el ***operador adjunto*** *de T.*

Demostración: La definicón de T^* como función está dada por el Teorema anterior. La unicidad de T^* también está garantizada por dicho resultado. La linealidad de T^* se sigue de las propiedades del producto interno. □

Ejemplo 130. El adjunto de la identidad es la identidad.

Ejemplo 131. El adjunto del operador cero es el operador cero.

Observación 132. Sean T un operador lineal, y sea A una matriz cuadrada. Entonces T^* denota el operador adjunto de T, y A^* denota la matriz transpuesta conjugada de A. La matriz adjunta de A es la transpuesta de la matriz de cofactores de A, y no necesariamente es igual a A^*.

Lema 133. *Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, y sea $\beta = v_1, \ldots, v_n$ una base ortonormal de V. Sea T un operador lineal en V y sea A la matriz asociada a T con respecto a la base ortonormal β. Entonces $A_{kj} = (Tv_j|v_k)$.*

Corolario 134. *Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, sea T un operador lineal en V, y sea β una base ortonormal de V. Entonces la matriz asociada a T^* con respecto a β es la transpuesta conjugada de la matriz asociada a T con respecto a β.*

Demostración: Sean A la matriz asociada a T y B la matriz asociada a T^*, ambas con respecto a β. Tenemos que $A_{kj} = (Tv_j|v_k)$ y $B_{kj} = (T^*v_j|v_k) = (v_k|\bar{T}^*v_j) = T\bar{v_k}|v_j = \bar{A_j}k$. □

3.5. Operadores unitarios y operadores normales.

Definición 135. Un operador lineal T se llama **autoadjunto** (o **hermitiano**, o **hermítico**) si $T = T^*$.

Definición 136. Sean V, W espacios con productos internos, y sea T una transformación lineal de V en W. Decimos que T **preserva productos internos** si $(Tv|Tu) = (v|u)$ para cualesquiera v, u en V. Un **isomorfismo de espacios con producto interno** es un isomorfismo lineal que preserva productos internos. Un **operador unitario** es un operador lineal en V que es un isomorfismo de espacios con producto interno. Una matriz compleja A de n por n es **unitaria** si $(A^*)A = I$. Una matriz cuadrada A real o compleja es **ortogonal** si $(A^t)A = I$.

Definición 137. Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, y sea T un operador en V. Se dice que T es **normal** si T conmuta con su adjunto, es decir, $T(T^*) = (T^*)T$. Una matriz compleja cuadrada A se dice que es normal si $A(A^*) = (A^*)A$.

3.6. Teorema Espectral.

Teorema 138. *(Teorema Espectral) Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita. Si F es $\mathbb{R}$, sea T un operador autoadjunto en V, y si F es $\mathbb{C}$, sea T un operador normal en V. Sean $c_1, \ldots, c_k$ los valores propios distintos de T, y sean W_j el espacio propio asociado a c_j, y E_j la proyección ortogonal de V sobre W_j. Entonces W_j es ortogonal a W_i para toda i distinta de j, $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, y $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$. En particular, existe una base ortonormal de V que consiste de vectores propios de T.*

Demostración: La demostración del Teorema Espectral va más allá de este curso. El lector interesado puede encontrar una demostración en [3]. $\square$

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 139. Use el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener a partir de los vectores (1,1,0) y (2,0,7) una base ortonormal del subespacio que generan.

Ejercicio 140. Use el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener a partir de los vectores (1,1,0,0), (2,0,2,0) y (1,0,3,4) una base ortonormal del subespacio que generan.

Ejercicio 141. Dé un ejemplo de una matriz cuadrada A tal que A^* no sea la matriz adjunta de A.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 142. La relación "v es ortogonal a u."es una relación de equivalencia en V.

Ejercicio 143. Sea T un operador lineal en un espacio con producto interno de dimensión finita V, y sea β una base de V. Entonces la matriz asociada al operador adjunto de T con respecto a la base β es la matriz transpuesta conjugada de la matriz asociada a T con respecto a β.

Ejercicio 144. Sea T un operador lineal en un espacio con producto interno de dimensión finita V, y sea β una base ortonormal de V. Entonces la matriz asociada al operador adjunto de T con respecto a la base β es la matriz adjunta de la matriz asociada a T con respecto a β.

Ejercicio 145. Sea T un operador lineal en un espacio con producto interno de dimensión finita V, y sea β una base ortonormal de V. Entonces el operador T es autoadjunto si y solamente si la matriz asociada a T con respecto a β es una matriz autoadjunta.

Ejercicio 146. Sea T un operador lineal en un espacio con producto interno de dimensión finita V, y sea β una base ortonormal de V. Entonces el operador T es unitario si y solamente si la matriz asociada a T con respecto a β es una matriz unitaria.

Ejercicio 147. Sea A una matriz unitaria. Entonces A es ortogonal si y solamente si todas sus entradas son reales.

Demostraciones.

Ejercicio 148. Sea V un espacio con producto interno $(|)$. Demuestre que $(0|v) = 0 = (v|0)$ para todo vector v en V.

Ejercicio 149. Sea V un espacio con producto interno $(|)$. Demuestre que $(v|cu+w) = \bar{c}(v|u)+(v|w)$ para cualesquiera vectores v, u, w en V, y cualquier escalar c en F.

Ejercicio 150. Enuncie y demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Ejercicio 151. Enuncie y demuestre la desigualdad del triángulo.

Ejercicio 152. Demuestre que v es ortogonal a u si y solamente si u es ortogonal a v.

Ejercicio 153. Sea $u = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m$ con los v_i no nulos y ortogonales entre sí. Entonces $c_k = (u|v_k)/||v_k||^2$ para toda k.

Ejercicio 154. Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores ortonormales. Entonces $||c_1v_1+\cdots+c_nv_n||^2 = |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2$.

Ejercicio 155. Sea W un subespacio de V, y u en V.

1. El vector v en W es una mejor aproximación a u por W si y solamente si $u - v$ es ortogonal a todo vector de W.

2. Si existe una mejor aproximación a u por W, es única.

3. Si W es de dimensión finita y $v_1, \ldots, v_n$ es una base ortogonal de W, entonces
$$v = \sum_{k=1}^{n} \frac{(u|v_k)}{||v_k||^2} v_k$$
es la única mejor aproximación a u por elementos de W.

Ejercicio 156. Sea V un espacio con producto interno, y sea S un subconjunto cualquiera (no necesariamente subespacio) de V. Entonces $S^\perp$ es un subespacio de W.

Ejercicio 157. Enuncie y demuestre la desigualdad de Bessel.

Ejercicio 158. Sean u, v en V tales que $(u|w) = (v|w)$ para todo w en V. Entonces $u = v$.

Ejercicio 159. Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, y sea $\beta = v_1, \ldots, v_n$ una base ortonormal de V. Sea T un operador lineal en V y sea A la matriz asociada a T con respecto a la base ortonormal β. Entonces $A_{kj} = (Tv_j|v_k)$. Muestre con un ejemplo que este resultado es falso si la base β no fuera ortonormal.

Ejercicio 160. Sean T y U operadores lineales en un espacio con producto interno de dimensión finita V, y sea c un escalar. Entonces

1. $(T + U)^* = T^* + U^*$

2. $(cT)^* = \bar{c}T^*$

3. $(TU)^* = U^*T^*$

4. $(T^*)^* = T$

Ejercicio 161. Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita. Sea W un subespacio de V. Sabemo que $V = W \oplus W^\perp$. Sea E la función en V dado por $E(v) = w$ donde $v = w + z$ con w en W y z en $W^\perp$ es la descripción única de v como suma de vectores en W y $W^\perp$. Demuestre que E es un operador lineal en V, $E \circ E = E$, la imagen de E es W, y el núcleo de E es $W^\perp$. Al operador E le llamamos la **proyección ortogonal sobre** W.

Ejercicio 162. Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, y sea W un subespacio de V. Demuestre que la proyección ortogonal sobre W es la proyección sobre W paralelamente a $W^\perp$.

Ejercicio 163. Sea T un operador normal complejo, o un operador autoadjunto real. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base ortonormal de V de vectores propios de T.

1. Demuestre que $T^*(v_i)$ es ortogonal a v_j para toda j distinta de i. Concluya que v_i también es vector propio de T^*.

2. Si $T(v_i) = c_i v_i$, demuestre que $T^*(v_i) = \bar{c}_i v_i$.

Capítulo 4

Formas bilineales.

4.1. Definición y ejemplos de formas bilineales.

Notación 164. A lo largo de este capítulo, F denota un campo arbitrario, V un F-espacio vectorial de dimensión finita n, y $\beta = b_1, \ldots, b_n$ es una base de V.

Definición 165. Una **forma bilineal** en V es una función $f : V \times V \longrightarrow F$ tal que para cualesquiera v, u, w en V y escalar c,

1. $f(cv + u, w) = cf(v, w) + f(u, w)$
2. $f(v, cu + w) = cf(v, u) + f(v, w)$

Ejemplo 166. Todo producto interior sobre los reales es una forma bilineal.

Ejemplo 167. La forma bilineal cero, que asigna a toda pareja de vectores el escalar cero, es una forma bilineal.

Ejemplo 168. Sea F un campo arbitrario, y sea $V = F \times F$. La función que asigna a la pareja de vectores (a, b) y (x, y) el escalar $ax + by$ es una forma bilineal en V.

Ejemplo 169. Sea $V = F^n$ visto como matrices de n por 1, y sea A una matriz de n por n con entradas en F. Dados vectores X, Y en V, defina $f(X, Y) = X^t AY$, donde X^t denota la transpuesta del vector X. Entonces f es una forma bilineal en F^n.

4.2. Matriz asociada a una forma bilineal.

Definición 170. Sea f una forma bilineal en V. Sea A la matriz de n por n dada por $A_{ij} = f(b_i, b_j)$. La matriz A es la **matriz de la forma bilinea** f en la base $\beta = b_1, \ldots, b_n$, y se denota $[f]_\beta$.

Ejemplo 171. Sea $V = F^n$ visto como matrices de n por 1, y sea A una matriz de n por n con entradas en F. Dados vectores X, Y en V, defina $f(X,Y) = X^t AY$, donde X^t denota la transpuesta del vector X. Entonces la matriz asociada a f en la base canónica es justamente la matriz A.

Proposición 172. *Sea f una forma bilineal en V, y sean β y γ bases de V. Sea A la matriz asociada a f en la base β, y sea B la matriz asociada a f en la base γ. Sea P la matriz de cambio de base de β a γ. Entonces $A = P^t BP$. En particular, el rango de A y B es el mismo.*

Demostración: Ejercicio. □

4.3. Formas bilineales no degeneradas.

Definición 173. Sea f una forma bilineal. El **rango** de f es el rango de la matriz asociada a f en cualquier base.

Ejemplo 174. El rango de la forma bilineal cero es cero.

Teorema 175. *Sea f una forma bilineal en V de dimensión n. Son equivalentes:*

1. *El rango de f es n.*
2. *Para todo v no nulo en V, existe u en V tal que $f(v,u)$ no es cero.*
3. *Para todo u no nulo en V, existe v en V tal que $f(v,u)$ no es cero.*

*Si f cumple cualquiera de estas condiciones, decimos que f es **no degenerada** (o **no singular**).*

Demostración: Supongamos que el rango de f es n. Sea v en V distinto de cero. Podemos completar este vector a una base de V, y la matriz de f con respecto a esta base debe tener rango n. En particular, no puede haber ni un renglón ni una columna de ceros, por lo que 1) implica 2) y 3). Supongamos ahora que para todo vector no nulo v, existe un vector u en V tal que $f(v,u)$ no es cero. Defina una transformación lineal L_f de V en el dual de V dada por $L_f(v)(u) = f(v,u)$. Dada una base cualquiera β en V, consideramos su base dual β^* como base del espacio dual de V. Si X y Y son vectores coordenadas en V con respecto a la base β de v y u respectivamente, vemos que $L_f(v,u) = f(v,u) = X^tAY$, donde A es la matriz asociada a f con respecto a la base β. Vemos que al i-ésimo vector básico en β L_f le asigna el funcional lineal que consiste en hacer producto punto al vector coordenada de Y con la i-ésima columna de la matriz A, es decir, la matriz asociada a L_f con respecto a la base β de V y β^* de V^* es precisamente A, por lo que el rango de f, que es el rango de A, es igual también al rango de L_f. Si el rango de A no fuera n, existiría un vector no nulo Y tal que $AY = 0$, y por lo tanto $X^tAY = 0$ sin importar el vector X, es decir, se contradiría la hipótesis 2). Un razonamiento análogo nos da que 3) implica 1). $\square$

Ejemplo 176. Sea f la forma bilineal en F^2 dada por $f((a,b),(x,y)) = ax + by$. Entonces f es no degenerada.

Ejemplo 177. Sea f la forma bilineal en F^2 dada por $f((a,b),(x,y)) = ax$. Entonces f es degenerada.

4.4. Formas bilineales simétricas.

Definición 178. Sea f una forma bilineal en V. Decimos que f es **simétrica** si $f(u,v) = f(v,u)$ para cualesquiera vectores v y u en V.

Ejemplo 179. Sea f la forma bilineal en F^2 dada por $f((a,b),(x,y)) = ax + by$. Entonces f es simétrica.

Ejemplo 180. Sea f la forma bilineal en F^2 dada por $f((a,b),(x,y)) = ay$. Entonces f no es simétrica.

Definición 181. Sea f una forma bilineal simétrica. La **forma cuadrática** asociada a f es la función q de V en F dada por $q(v) = f(v,v)$.

Lema 182. *(Identidad de Polarización) Sea F un campo de característica distinta de dos. Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita y sea f una forma bilineal simétrica en V con forma cuadrática asociada q. Entonces*

$$f(v,u) = \frac{1}{4}(q(v+u) - q(v-u))$$

Demostración: Ejercicio. $\square$

4.5. Teorema de Sylvester.

Lema 183. *Sea f una forma bilineal simétrica en V, y sea v en V tal que $f(v,v)$ no es cero. Sean $W =< v >$, y $W^{\perp} = \{u|f(v,u) = 0\}$. Entonces $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Demostración: Ejercicio. □

Teorema 184. *(Teorema de Sylvester) Sean F un campo de característica distinta de dos, V un F-espacio vectorial de dimensión finita, f una forma bilineal simétrica en V. Entonces existe una base de V con respecto a la cual f está representada por una matriz diagonal (es decir, $f(v_i, v_j) = 0$ para cualesquiera básicos distintos v_i y v_j).*

Demostración: Inducción sobre la dimensión de V. Si la dimensión es cero o uno, el teorema es válido, pues cualquier base funciona. Supongamos que el teorema es válido para espacios de dimensión n, y demostremos que vale para espacios de dimensión $n+1$. Si $f(v,v) = 0$ para todo v en V, entonces por la Identidad de Polarización tenemos que $f(v,u) = 0$ para cualesquiera v y u, y cualquier base de V da la matriz cero, que es diagonal. Supongamos que existe un vector v en V tal que $f(v,v)$ no es cero. Sean $W =< v >$, y $W^{\perp} = \{u|f(v,u) = 0\}$. Por el Lema, $V = W \oplus W^{\perp}$. Sea $\bar{f}$ la restricción de f a $W^{\perp}$. Note que $\bar{f}$ es una forma bilineal simétrica en $W^{\perp}$. Por hipótesis de inducción, existe una base $v_1, \ldots, v_n$ de $W^{\perp}$ tal que $f(v_i, v_j) = 0$ para cualesquiera i, j distintos. La base $v, v_1, \ldots, v_n$ de V cumple lo requerido. □

Ejercicios computacionales.

Ejercicio 185. Calcule el rango de la forma bilineal en F^2 dada por $f((a,b),(x,y)) = ax + by$.

Ejercicios de Falso o Verdadero (Justifique su respuesta).

Ejercicio 186. Toda forma bilineal es una transformación lineal.

Ejercicio 187. Una forma bilineal f es simétrica si y solamente si su matriz asociada con respecto a cualquier base es una matriz simétrica (es decir, $A = A^t$).

Ejercicio 188. La forma cuadrática asociada a una forma bilineal simétrica es una transformación lineal de V en F.

Demostraciones.

Ejercicio 189. Demuestre que una combinación lineal de formas bilineales en V es una forma bilineal en V.

Ejercicio 190. Sean ρ, σ funcionales lineales en V. Defina $f(v,u) = \rho(v)\sigma(u)$. Entonces f es una forma bilineal en V. ¿Toda forma bilineal en V es de esta forma?

Ejercicio 191. Demuestre que toda forma bilineal en F^n está dada como en el Ejemplo 169.

Ejercicio 192. Sea f una forma bilineal en V, y sean β y γ bases de V. Sea A la matriz asociada a f en la base β, y sea B la matriz asociada a f en la base γ. Sea P la matriz de cambio de base de β a γ. Entonces $A = P^tBP$. En particular, el rango de A y B es el mismo.

Ejercicio 193. (Identidad de Polarización) Sea F un campo de característica distinta de dos. Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita y sea f una forma bilineal simétrica en V con forma cuadrática asociada q. Entonces

$$f(v,u) = \frac{1}{4}(q(v+u) - q(v-u))$$

Ejercicio 194. Sea f una forma bilineal simétrica en V, y sea v en V tal que $f(v,v)$ no es cero. Sean $W =< v >$, y $W^\perp = \{u | f(v,u) = 0\}$. Entonces $V = W \oplus W^\perp$. (Sugerencia: es análogo al Teorema de Gram-Schmidt).

Índice alfabético

Bibliografía

[1] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. *Algebra lineal*. Publicaciones Cultural, 1982.

[2] Paul R. Halmos. *Teoría intuitiva de los conjuntos*. Editorial CECSA, 1965.

[3] Kenneth Hoffman, Ray Kunze. *Álgebra lineal*. Prentice Hall, 1973.

[4] I. Proskuriakov. *Problemas de álgebra lineal*. Editorial Mir, Moscú, 1986.

Aquí damos una pequeña bibliografía con los libros más importantes que les pueden servir en este curso.

Los dos libros más usados como textos son [3] y [1]. Yo en lo personal prefiero el Hoffman, pues me parece más completo. Por otro lado, muchos alumnos encuentran al Friedberg más fácil de entender.

Si desean un libro con muchos ejercicios les recomiendo el [4].

El [2] es un libro accesible de teoría de conjuntos, donde pueden consultar el Lema de Zorn y otras herramientas que se usan en espacios vectoriales de dimensión infinita.