Juzgando grupos

por sus marcas

Luis Valero-Elizondo

15 / Agosto / 2008

Escuela de Verano del IMUNAM, Unidad Morelia

Disponible en línea en

`http://www.fismat.umich.mx/~valero/`

Tablas de Marcas

Sea G un grupo finito. Escoja representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, y numérelos (usualmente de menor a mayor), digamos que son $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\varphi_{H_i}(G/H_j)$.

Note que

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \;& \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \;& \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \;& \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx) \leq K\}/|K| \\
= \;& \#\{E \leq G \mid E \leq K \text{ y } E =_G H \ \}|N_G(H)|/|K| \\
= \;& \beta(H,K)|N_G(H)|/|K|
\end{aligned}
$$

donde $A =_G B$ significa que A y B son conjugados en G, $\beta(H,K)$ es el número de subgrupos de G que son conjugados a H y están contenidos en K, y $N_G(H)$ denota el normalizador de H en G.

De manera análoga se puede demostrar que

$$
\begin{aligned}
& \varphi_H(G/K) = \\
= \; & \#\{xK \mid h(xK) = xK \forall h \in H\} \\
= \; & \#\{x \in G \mid h(xK) = xK \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx)K = K \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}hx) \in K \forall h \in H\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid (x^{-1}Hx) \leq K\}/|K| \\
= \; & \#\{x \in G \mid H \leq xKx^{-1}\}/|K| \\
= \; & \#\{E \leq G \mid H \leq E \text{ y } E =_G K\}|N_G(K)|/|K| \\
= \; & \alpha(H,K)|N_G(K)|/|K|
\end{aligned}
$$

donde $\alpha(H,K)$ es el número de subgrupos de G que son conjugados a K y que contienen a H.

Ejemplo 1. Sea $G = C_p$ un grupo cíclico de orden p primo. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Sea $G = C_4$ un grupo cíclico de orden 4. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3. Sea $G = C_6$ un grupo cíclico de orden 6. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = C_3$, $H_4 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4. Sea $G = S_3$ el grupo simétrico de orden 6. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 =< (1,2) >$, $H_3 =< (1,2,3) >$, $H_4 = G$, por lo que la tabla de marcas de G se ve

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las tablas de marcas.

La información siguiente se desprende de conocer la tabla de marcas M de un grupo G. Suponemos que los subgrupos se ordenaron de forma creciente para calcular la tabla de marcas.

El orden del grupo G: Es la mayor de las entradas de la tabla de marcas M (en el lugar $1-1$).

El número de clases de conjugación de subgrupos de G: Es el tamaño de M.

Los índices de los subgrupos de G: Son las entradas del primer renglón de M.

Los órdenes de los subgrupos de G: Se siguen de conocer los índices y el orden de G.

Los p-subgrupos de Sylow de G: Se reconocen por su orden.

El índice de H en su normalizador: Es la entrada $H - H$-ésima.

El orden del normalizador de H en G: Es la entrada $H - H$-ésima multiplicada por el orden de G y dividida por la entrada $1 - H$-ésima.

El índice del normalizador de H en G: Es el cociente de la entrada $1 - H$ dividida por la entrada $H - H$-ésima. Este número también es el número de conjugados del subgrupo H en G.

El número de subgrupos de G: Se obtiene sumando los conjugados de H para toda H.

Los subgrupos normales de G: Son los H tales que la columna H-ésima tiene sólo dos valores, que son cero y el índice de H en G.

Los subgrupos K (hasta conjugación) de un subgrupo H de G: Son aquéllos para los que la entrada $H - K$ es diferente de cero.

Los subgrupos maximales propios de G: Son los H para los cuales las entradas del renglón H-ésimo entre la $H - H$ y la $H - G$ son cero.

El subgrupo de Frattini de G (es la intersección de todos los subgrupos maximales de G): Es el mayor subgrupo normal de G contenido en todos los subgrupos maximales.

La tabla de marcas de un grupo cociente G/H: Usando el Teorema de la Correspondencia, se obtiene encontrando los subgrupos de G que contienen a H.

¿Es G abeliano?: Todos sus subgrupos son normales y no tiene ningún cociente isomorfo a los cuaternios de orden 8.

El subgrupo derivado de G: Es el mayor subgrupo normal de G cuyo cociente es abeliano.

Los subgrupos cíclicos de G: Son los H tales que tienen un único subgrupo para cada divisor del orden de H.

Los subgrupos elementales abelianos de G (es decir, $(C_p)^n$): Están caracterizados por el número de subgrupos de orden p^2. Un subgrupo H de G es elemental abeliano si el orden de H es p^n para algún primo p y un entero $n \geq 1$, y ya sea que $n = 1$, o que $n = 2$ y H no sea cíclico, o que $n \geq 3$ y que el número de subgrupos de H de orden p^2 sea $(p^n - 1)(p^n - p)/(p^2 - 1)(p^2 - p)$.

Problemas resueltos y problemas abiertos

Tuve dos tesistas de licenciatura (Luis Manuel Huerta Aparicio y Ariel Molina Rueda) trabajando en Tablas de Marcas. Ellos resolvieron los siguientes problemas abiertos usando GAP:

Encontrar los subgrupos H de G tales que H es abeliano: Podemos determinar si G es abeliano, y podemos encontrar los subgrupos de G que sean cíclicos o elementales abelianos, pero no se sabía si era posible determinar los subgrupos abelianos de G. Luis Manuel encontró un grupo de orden 81 que tenía 4 subgrupos de orden 27, uno de ellos abeliano y los otros tres no, que son indistinguibles en la tabla de marcas.

Encontrar el centro de G: Es posible determinar el subgrupo derivado de G a partir de la tabla de marcas, pero no se sabía si era posible encontrar el centro del grupo. Ariel encontró dos grupos G y Q con tablas de marcas isomorfas, pero cuyos centros tenían órdenes distintos (G tenía centro de orden 8, y Q centro de orden 4).

Por otro lado, un problema (aparentemente sencillo) que aún no se sabe es si la tabla de marcas determina al segundo subgrupo conmutador, es decir, el subgrupo conmutador del subgrupo conmutador (y al tercero, cuarto, ...)