Aportaciones Matemáticas
Serie Comunicaciones **35** (2005) 147–174
Artículo Expositorio

SUBMODELOS ELEMENTALES EN TOPOLOGÍA

FERNANDO HERNÁNDEZ-HERNÁNDEZ

Resumen. En este artículo se presentan los resultados centrales que componen los pre-requisitos teóricos detrás de la técnica de los submodelos elementales y se presenta una basta cantidad de ejemplos de la aplicación de esta ténica en topología. En la última sección se presenta una construcción novedosa de una Línea de Souslin sin necesidad de usar árboles y se discuten temas relacionados.

La idea de esta nota es presentar con algunos ejemplos el uso de la técnica de *submodelos elementales*. Vamos a incluir la mayoría de las definiciones necesarias a fin de que el material aquí presentado sea autocontenido hasta donde sea posible. También empezaremos por analizar ejemplos bastante conocidos y relativamente sencillos con suficiente detalle. Empero, vamos a suponer que se tiene familiaridad con nociones como las de número ordinal, número cardinal, las propiedades de estos objetos y ralo conocimiento de recursión transfinita. Aunque, si se siente incomodidad tratando con cardinales arbitrarios κ, casi en todas nuestras aseveraciones se puede substituir κ por $\aleph_0$; o sea, por la frase “sea... numerable”, y sólo en pocos casos por $> \aleph_0$; o sea, por la frase “sea... no numerable”. Cada una de las cosas que aquí se presentan fueron tomadas de alguno de los trabajos que aparecen al final en la bibliografía.

En teoría de conjuntos los submodelos elementales se han venido usando desde hace ya mucho tiempo; en topología general la técnica ha tenido un incremento notable en los últimos quince años. Aunque ya habían aparecido argumentos de reflexión sin usar propiamente el lenguaje de submodelos elementales por Mary Ellen Rudin [9] y ya con ese lenguaje como una herramienta conjuntista para la solución de problemas específicos en topología por Zoltán Balogh [1] y Stevo Todorčević [10]; con suficiente confianza y equidad creemos que quien propuso de una manera concisa y definitiva el empleo de esta técnica como una valiosa herramienta para la investigación en topología fue Alan Dow con su artículo [3] de 1988: *An introduction to applications of elementary submodels to topology.*

No creemos que llegue a sorprendernos que en corto plazo la técnica se haga cotidiana en los artículos de investigación porque los topólogos, viendo la ventaja de los

2000 *Mathematics Subject Classification.* 54A25, 03E75 (54E35, 03C98).

argumentos con submodelos elementales sobre aquellos puramente combinatorios, sin duda usarán submodelos elementales con más frecuencia; de aquí que para ser capaz de leer dichos artículos se hará indispensable entender el lenguaje de los submodelos elementales. Sin embargo, para quienes tenemos una formación más en topología que en lógica, tratar con modelos, tener la idea de que estamos usando lógica de una manera fuera de lo usual y ver que las conclusiones llegan a nosotros mediante una especie de magia, nos hace sentir que algo así no puede ser comprendido sin un profundo estudio en lógica. La intención de este artículo es mostrar que esa idea no es precisamente la correcta y que todos nosotros podemos entender, usar y beneficiarnos de la técnica de los submodelos elementales. A través de ejemplos trataremos de exponer que esta técnica puede proveernos de un conveniente atajo para todos los argumentos comúnmente empleados en los que se busca la cerradura de alguna propiedad, una poderosa herramienta la cual puede ser evitada pero a menudo a gran costo en elegancia y claridad, y un magistral instrumento conceptual que nos proporciona una mayor visión de la estructura de el universo de la teoría de conjuntos.

1. Definición y propiedades.

Algo fabuloso de los argumentos con submodelos elementales es que ellos son simplemente una abreviación para otros argumentos más largos y menos intuitivos que no usan submodelos elementales y, por supuesto, es posible usar teoría de modelos para justificar lógicamente cada aplicación de submodelos elementales en una demostración matemática. Recomendamos consultar [2] para profundizar en cuestiones de Teoría de Modelos. Uno de los fenómenos que con frecuencia lo sorprenden a uno es lo intempestivo y en ocasiones lo contrastante que parecen las conclusiones. Sin embargo, lo que uno debe tener siempre claro es que: lo que estamos estudiando no son los fenómenos de nuestro mundo real (sin duda más caótico), sino las consecuencias de nuestros axiomas. Por eso, evidentemente, algo de lógica y teoría de conjuntos tenemos que estudiar antes de introducir los submodelos elementales. Entre las cosas que uno nunca debe perder de vista es cuál es el lenguaje de la teoría de conjuntos: ¡No es nada más que la relación binaria $\in$! Todas las otras nociones que comúnmente usamos son abreviaciones definidas a partir de $\in$. Obviamente nunca olvidaremos tampoco que para nosotros todo lo existente en nuestro universo de discurso es un conjunto.

Como es costumbre, para una fórmula φ escribiremos $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ para dar a entender que las variables libres de φ están entre $v_1, \ldots, v_n$ y también escribiremos: sean $x, y, x_1, \ldots, x_n$ conjuntos y hablar de $\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ entendiendo que φ es de la forma $\varphi(v_1, \ldots, v_{n+2})$, que v_1 denota el conjunto x, v_2 el conjunto y y v_{i+2} el conjunto x_i.

Cuando especificamos un modelo para la Teoría de Conjuntos debemos designar un conjunto $\mathfrak{M}$ y una interpretación $\in^{\mathfrak{M}}$ de la relación de pertenencia $\in$. Sin embargo, necesitaremos asumir que $\mathbf{V}$, el universo de los conjuntos, es un modelo de ZFC en el cual $\in$ es la usual pertenencia de conjuntos y cualquier modelo $\mathfrak{M}$ será un subconjunto o subclase de $\mathbf{V}$ y heredará la relación de pertenencia usual. Si φ es una fórmula de la teoría de conjuntos, la verdad de φ se refiere a su verdad en $\mathbf{V}$. Si $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{V}$, entonces $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ denota la relación de satisfacción para $\mathfrak{M}$ definida por inducción sobre la complejidad de φ como sigue:

: Para una fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ y $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi(m_1 \ldots, m_n) \tag{1}$$

si:

: (a) φ es atómica:

$$\mathfrak{M} \vDash a \in b, \quad \text{si } a \in b,$$

: (b) φ es una negación o conjunción:

$$\mathfrak{M} \vDash \neg\psi, \text{ si no se tiene que } \mathfrak{M} \vDash \psi,$$

$$\mathfrak{M} \vDash \psi_1 \wedge \psi_2, \quad \text{si } \mathfrak{M} \vDash \psi_1 \text{ y } \mathfrak{M} \vDash \psi_2,$$

: (c) φ es $(\exists x)\psi$:

$$\mathfrak{M} \vDash (\exists x)\psi(x, m_1, \ldots, m_n), \text{ si } (\exists m \in \mathfrak{M})\,(\mathfrak{M} \vDash \psi(m, m_1, \ldots, m_n))$$

Notemos que la definición anterior únicamente nos da instrucciones de cómo "decodificar" (1) para cualquier fórmula particular.

Si consideramos una fórmula libre de cuantificadores $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ y una sucesión de elementos $m_1, \ldots, m_n$ de $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{V}$, la validez de $\varphi(m_1, \ldots, m_n)$ (en $\mathbf{V}$) está basada simplemente en una combinación booleana de afirmaciones que ciertos m_i son (o no) elementos de otros de los m_j's. En adición, por nuestra convención de lo que es un submodelo, la afirmación

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi(m_1, \ldots, m_n)$$

es exactamente lo mismo; es decir, $\in^{\mathfrak{M}} = \in \cap (\mathfrak{M} \times \mathfrak{M})$. Si la validez de una fórmula φ es mantenida cuando pasamos de $\mathfrak{M}$ a $\mathbf{V}$, diremos que φ es *preservada* y si la validez de φ es mantenida cuando pasamos de $\mathbf{V}$ a $\mathfrak{M}$, diremos que φ es *reflejada*. En general, una fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ es *absoluta* para dos modelos $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ si para cada sucesión $m_1, \ldots, m_n$ de elementos de $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi(m_1, \ldots, m_n) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{N} \vDash \varphi(m_1, \ldots, m_n).$$

Ciertamente las fórmulas no necesariamente se preservan cuando pasamos de un modelo a otro. Consideremos una fórmula simple: $v_1 \subseteq v_2$. Lo primero que se debe preguntar es si es una fórmula de la teoría de conjuntos. Como ya dijimos, el lenguaje informal de la teoría de conjuntos se ve fuertemente enriquecido por símbolos definidos; pero uno debería adoptar una manera simple de traducir cualquier fórmula. Por ejemplo, $v_1 \subseteq v_2$ es una abreviación para $(\forall x)\,(x \in v_1 \Rightarrow x \in v_2)$. Para que $\mathfrak{M}$ y $\mathbf{V}$ coincidan para esta fórmula es suficiente (y necesario) que coincidan en la fórmula

$(\exists x)\,(x \in v_1 \wedge x \notin v_2)$. Sin embargo, $(x \in v_1 \wedge x \notin v_2)$, siendo libre de cuantificadores, se preserva, con lo que es suficiente tener que

$$(\exists x)\,(x \in v_1 \backslash v_2) \Rightarrow (\exists x \in \mathfrak{M}\,)\,(x \in v_1 \backslash v_2)$$

sea válida. Este último ejemplo es un caso especial del *Criterio de Tarski-Vaught* —el énfasis está en el hecho de que la completa afirmación toma lugar en $\mathbf{V}$ y la idea es que todo lo que necesitamos hacer para que $\mathbf{V}$ y $\mathfrak{M}$ coincidan en esta fórmula es elegir testigos en $\mathbf{V}$ y agregarlos a $\mathfrak{M}$.

Proposición 1.1. *Supóngase que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una lista de fórmulas que es subfórmula cerrada. Supóngase además que $\mathfrak{N}$ es un conjunto o clase y $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ de manera que siempre que φ_j es de la forma*

$$(\exists x)\,\varphi_i(x, v_1, \ldots, v_n)$$

y $m_1, \ldots, m_n$ son elementos de $\mathfrak{M}$, las siguientes implicaciones se cumplen:

$$\mathfrak{N} \models (\exists x)\,\varphi_i(x, m_1, \ldots, m_n) \Rightarrow \mathfrak{N} \models (\exists x \in \mathfrak{M})\,\varphi_i(x, m_1, \ldots, m_n). \tag{2}$$

Entonces, para cada φ_k y $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M} \models \varphi_i(m_1, \ldots, m_n) \ \text{ si y sólo si } \ \mathfrak{N} \models \varphi_i(m_1, \ldots, m_n).$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre la longitud de φ_i y mostraremos que φ_i es absoluta para $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$; o sea, que si φ_i es una fórmula en las variables $v_1, \ldots, v_n$ y tenemos $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{M}$, entonces

$$\mathfrak{M} \models \varphi_i(m_1, \ldots, m_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{N} \models \varphi_i(m_1, \ldots, m_n).$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el símbolo $\forall$ no aparece en ninguna de las fórmulas φ_i. Supongamos que hemos verificado la absolutes para fórmulas más cortas que φ_i. Si φ_i es una fórmula atómica, entonces es absoluta. Si φ_i es $\varphi_j \wedge \varphi_{j'}$, la absolutes de las fórmulas (más cortas) φ_j y $\varphi_{j'}$ implica la absolutes de φ_i. Del mismo modo si φ_i es $\neg\varphi_j$. Ahora supóngase que φ_i es de la forma $(\exists x)(\varphi_j(x, v_1, \ldots, v_n)$ y fíjense $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{M}$; entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models \varphi_i(m_1, \ldots, m_n) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists m \in \mathfrak{M})\ (\mathfrak{M} \models \varphi_j(m, m_1, \ldots, m_n)) \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists m \in \mathfrak{M})\ (\mathfrak{N} \models \varphi_j(m, m_1, \ldots, m_n)) \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists m)\ (\mathfrak{N} \models \varphi_j(m, m_1, \ldots, m_n)) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \varphi_i(m_1, \ldots, m_n)
\end{aligned}$$

Donde en el segundo $\Leftrightarrow$ estamos usando que al ser φ_j más corta que φ_i la hipótesis inductiva nos dice que φ_j es absoluta, y en el tercer $\Leftrightarrow$ estamos usando la hipótesis (2) del teorema. □

Mientras que es muy difícil saber qué fórmulas un modelo arbitrario $\mathfrak{M}$ puede o no satisfacer, un submodelo elemental es simple en el sentido que sus verdades son las mismas que aquellas para $\mathbf{V}$. Si en la Proposición 1.1 la lista de fórmulas se extiende a todas las fórmulas, entonces $\mathfrak{M}$ se dice un *submodelo elemental* de $\mathfrak{N}$, y se denota $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Esto es:

Definición 1.2. Si $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ y para toda fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ de la teoría de conjuntos y para cada sucesión finita $m_1, \ldots, m_n$ de elementos en $\mathfrak{M}$ se tiene que

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi(m_1, \ldots, m_n) \ \textit{si y sólo si} \ \mathfrak{N} \vDash \varphi(m_1, \ldots, m_n),$$

entonces diremos que $\mathfrak{M}$ *es un submodelo elemental de* $\mathfrak{N}$.

El segundo teorema de incompletitud de Gödel implica que la existencia de conjuntos $\mathfrak{M}$ los cuales son submodelos elementales de $\mathbf{V}$ no es demostrable. Sin embargo, esto no es una limitación práctica para usar los submodelos elementales. En algunos momentos veremos que podemos demostrar la existencia de una basta cantidad de submodelos elementales adecuados para nuestros propósitos.

Una confusión común en el uso de submodelos es que $\mathfrak{M} \vDash \varphi(X)$ no es lo mismo que $\mathbf{V} \vDash \varphi(X \cap \mathfrak{M})$. Por ejemplo, uno puede fácilmente tener un ordinal $\alpha \in \mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash$ "α es el primer cardinal no numerable", diríamos entonces que $\alpha = \omega_1^{\mathfrak{M}}$, mientras que de hecho α podría ser un ordinal numerable de $\mathbf{V}$. Sin embargo esto no sucede en submodelos elementales (aún en los numerables), ya que la afirmación que asegura que un cierto ordinal α es el ω_1 del modelo tendría que ser cierta para el mismo ordinal α en ambos modelos. No obstante, si $\mathfrak{M}$ es numerable de modo que $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1$, entonces $\omega_1 \cap \mathfrak{M}$ sería un conjunto numerable en $\mathbf{V}$ y aún así no un elemento de $\mathfrak{M}$.

Para el uso de los submodelos elementales en topología general hay principalmente dos métodos de demostrar la existencia de tales objetos y no hay una diferencia substancial entre éstos. Veremos rápidamente ambos métodos para obtener una visión más completa de la materia y estar preparados para leer cualquiera de las dos maneras en que aparecen en la literatura. Por un lado, el primer método tiene la ventaja de que está listo y es apropiado para la investigación de preguntas de consistencia. El segundo método, en cierto sentido es menos formal; pero en realidad no hay nada erróneo en él y es más fácil de introducir dado que no necesita de muchas definiciones. Adelante comentaremos más de esto. Introduzcamos pues el primer método; empezaremos con algunas definiciones.

Un conjunto x es *transitivo* si cualquiera de sus elementos es un subconjunto de él. La *clausura transitiva* de un conjunto X, existe y es definida como el $\subseteq$-mínimo conjunto transitivo que contiene X. Para un cardinal infinito θ, $H(\theta)$ se define como el conjunto de todos los conjuntos cuya clausura transitiva tiene cardinalidad menor que θ. A los elementos de $H(\theta)$ se les conoce como conjuntos de cardinalidad hereditariamente menor que θ. Ver [8, IV.6] para más información y la demostración del siguiente resultado.

Teorema 1.3. *Si θ es un cardinal regular no numerable, entonces $H(\theta)$ es un modelo de cada uno de los axiomas de* ZFC *excepto para el axioma del conjunto potencia —denotado* ZFC-P.

Como ya mencionamos antes, la existencia de submodelos elementales de $\mathbf{V}$ no puede ser demostrada. Esto se debe principalmente al hecho de que la teoría de conjuntos tiene infinitos axiomas (reemplazo y comprehensión son esquemas para axiomas y no axiomas en sí). En la práctica, cuando uno investiga propiedades de algún objeto, pongamos por ejemplo un espacio topológico (X, τ), uno usualmente conoce el máximo tamaño posible de todo lo relevante para la validez de la propiedad. Entonces uno necesita optar por la siguiente mejor alternativa: encontrar un modelo de un segmento suficientemente rico de la teoría de conjuntos en el cual podamos llevar a cabo nuestro argumento y que dicho modelo sea un conjunto. Esto se logra mediante el Principio de Reflexión de Lévy que tiene cierta similaridad con nuestra Proposición 1.11. Entonces, una vez que hemos encogido nuestro modelo a un conjunto; a saber, un $H(\theta)$ tomando θ suficientemente grande de manera que $H(\theta)$ y $\mathbf{V}$ coincidan en las verdades relevantes para nuestros argumentos, entonces podremos aplicar nuestro siguiente teorema conocido como la versión descendiente del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski. De esta manera, las fórmulas son relativizadas no entre el universo y $\mathfrak{M}$ sino entre $H(\theta)$ y $\mathfrak{M}$. No presentaremos la demostración del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski; pero afirmamos que tiene similaridad a la que damos de la Proposición 1.11 y que al analizarla podríamos darnos cuenta lo transparente que es el concepto de submodelo elemental.

Teorema 1.4. *Para cualquier cardinal regular no numerable θ y cualquier conjunto $X \subseteq H(\theta)$, hay un submodelo elemental $\mathfrak{M}$ de $H(\theta)$, tal que $X \subseteq \mathfrak{M}$ y $|\mathfrak{M}| \leq |X| + \aleph_0$*

Por lo tanto, realmente sin importar que tan grande sea θ, eligiendo $X \in H(\theta)$ apropiadamente este teorema nos proporciona submodelos elementales de $H(\theta)$ de casi cualquier cardinalidad, incluso numerable tomando X como $\emptyset$, por ejemplo. Más aún, dado un cardinal regular κ, incluso hay al menos κ submodelos elementales de cardinalidad menor que κ; esto se infiere con facilidad del Corolario 1.7.

Un muy útil concepto para el estudio y las aplicaciones de los submodelos elementales es el que a continuación presentamos. Una *cadena elemental* es una cadena de modelos

$$\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \prec \cdots \prec \mathfrak{M}_\beta \prec \cdots \qquad (\beta < \alpha)$$

tal que $\mathfrak{M}_\beta \prec \mathfrak{M}_\gamma$, siempre que $\beta < \gamma < \alpha$.

Teorema 1.5 (de la Cadena Elemental)**.** *Supongamos que $\langle \mathfrak{M}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ es una cadena elemental. Entonces $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi$ es un modelo y $\mathfrak{M}_\gamma \prec \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi$, para cada $\gamma < \alpha$.*

Demostración. Demostraremos únicamente la segunda parte del teorema. Pongamos $\mathfrak{M} = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi$. Demostraremos la siguiente afirmación por inducción sobre la longitud de las fórmulas φ: Para todo $\xi < \alpha$ y para todas las fórmulas $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ y toda sucesión de elementos $m_1, \ldots, m_n$ de $\mathfrak{M}_\xi$,

$$\mathfrak{M}_\xi \vDash \varphi(m_0, \ldots, m_n) \text{ si y sólo si } \mathfrak{M} \vDash \varphi(m_0, \ldots, m_n).$$

Podemos demostrar la afirmación usando el Criterio de Tarski-Vaught, Proposición 1.1. Sea $\xi < \alpha$. Asumamos que φ es $(\exists x)\psi(x, v_1, \ldots, v_n)$ y $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{M}_\xi$. Si $\mathfrak{M}_\xi \vDash \varphi(m_0, m_1, \ldots, m_n)$ entonces $\mathfrak{M}_\xi \vDash \psi(m_0, \ldots, m_n)$ para algún $m_0 \in \mathfrak{M}_\xi$. Así por inducción $\mathfrak{M} \vDash \psi(m_0, \ldots, m_n)$ y $\mathfrak{M} \vDash \varphi(m_0, \ldots, m_n)$.

Por otro lado, si $\mathfrak{M} \vDash (\exists x)\, \psi(x, m_1, \ldots, m_n)$, entonces para algún $\eta < \alpha$, $m_0 \in \mathfrak{M}_\eta$ y $\mathfrak{M} \vDash \psi(m_0, \ldots, m_n)$. Ya que $\langle \mathfrak{M}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ es una cadena elemental, podemos asumir que $\xi \leq \eta$. Como todos los $m_0, \ldots, m_n$ pertenecen a $\mathfrak{M}_\eta$, por inducción, $\mathfrak{M}_\eta \vDash \psi(m_0, \ldots, m_n)$ con lo que $\mathfrak{M}_\eta \vDash (\exists x)\, \psi(x, m_1, \ldots, m_n)$. Dado que $\mathfrak{M}_\xi \prec \mathfrak{M}_\eta$, tenemos que $\mathfrak{M}_\xi \vDash (\exists x)\, \psi(x, m_1, \ldots, m_n)$. ☐

Para nuestro siguiente corolario recuerde que un conjunto C de números ordinales se llama *cerrado* si siempre que $\alpha = \sup(C \cap \alpha)$ se tiene que $\alpha \in C$.

Corolario 1.6. *Sea $\langle \mathfrak{M}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ es una cadena bajo la inclusión de submodelos elementales de $H(\theta)$; es decir, $\xi < \zeta < \alpha$ implica $\mathfrak{M}_\xi \subseteq \mathfrak{M}_\zeta$ y $\mathfrak{M}_\xi \prec H(\theta)$. Entonces $\langle \mathfrak{M}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ es una cadena elemental y*

$$\bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi \prec H(\theta).$$

Corolario 1.7. *Para cardinales regulares no numerables $\kappa \leq \theta$ y $X \in H(\theta)$ con $|X| < \kappa$,*

$$\{\alpha \in \kappa : (\exists \mathfrak{M} \prec H(\theta))(X \subseteq \mathfrak{M} \wedge |\mathfrak{M}| < \kappa \wedge \mathfrak{M} \cap \kappa = \alpha\}$$

es un conjunto cerrado y no acotado en κ.

Demostración. Es suficiente con construir una cadena elemental, $\langle \mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$, de longitud κ de manera que para ordinales límites α, $\mathfrak{M}_\alpha = \bigcup \{\mathfrak{M}_\beta : \beta < \alpha\}$. ☐

Ejemplos de conjuntos cerrados no acotados son el conjunto de ordinales límite menores que κ y el conjunto de los límites de límites. El conjunto de cardinales menores que κ es siempre cerrado en κ, es no acotado si y sólo si κ es un cardinal límite (y por lo tanto débilmente inaccesible ya que κ es regular). Los conjuntos cerrados y no acotados deben pensarse como conjuntos grandes, o casi todo, o haciendo analogía con teoría de la medida con los de medida de probabilidad 1. No está por demás hacer notar que ser cerrado en este contexto es equivalente a ser cerrado como subconjunto de κ cuando se considera en κ la topología del orden.

Ligado al concepto de conjunto cerrado y no acotado está el de ser estacionario. $S \subseteq \kappa$ es *estacionario* si para todo conjunto cerrado y no acotado $C \subseteq \kappa$, $S \cap C \neq \emptyset$. Continuando con analogías, los conjuntos estacionarios deberían compararse con aquellos de medida diferente de cero; los no estacionarios —de medida cero— serían los ajenos a algún conjunto cerrado y no acotado. Estos conceptos conjuntistas son muy importantes y tienen un buen comportamiento en el marco de los submodelos elementales. Para más información sobre conjuntos cerrados no acotados y estacionarios ver [7, Sec. 7] o [8, Sec. II.6].

Proposición 1.8. *Sean S, C, X subconjuntos de un cardinal regular κ y sea $\theta > \kappa$ cardinal regular.*

(1) Si S es estacionario entonces para cualquier $A \in H(\theta)$ existe un $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ que incluye A como elemento y de manera que $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in S$.

(2) Si $C \in \mathfrak{M} \prec H(\theta)$ y C es cerrado y no acotado en κ, entonces $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in C$.

(3) Si $X \in \mathfrak{M} \prec H(\theta)$ y $\sup(\mathfrak{M} \cap \kappa) \in X$, entonces X es estacionario.

(4) Sea $X \subseteq \kappa$ de modo que ambos X y κ sean elementos de $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$. Si $(\forall \alpha \in \mathfrak{M} \cap \kappa)(\exists \beta \in X \backslash \alpha)$, entonces X es cofinal en κ. Similarmente, si $\exists \beta \in X$ tal que $\mathfrak{M} \cap \kappa \subseteq \beta$, entonces $X \cap \mathfrak{M}$ es cofinal en $\mathfrak{M} \cap \kappa$ y X es cofinal en κ.

Observemos que, para cardinales regulares θ, si $\mathfrak{M} \subseteq H(\theta)$ tiene cardinalidad menor que θ entonces $\mathfrak{M} \in H(\theta)$. Por lo tanto, podríamos haber construido cadenas elementales de manera que $\mathfrak{M}_\alpha \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}$; esto será llamado $\in$-*cadena elemental*. Una cadena elemental o $\in$-cadena elemental la llamaremos *continua* si para ordinales límites α, tenemos que $\mathfrak{M}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{M}_\xi$.

Frecuentemente haremos uso del siguiente teorema cuya demostración se basa en los Teoremas 1.4 y 1.5.

Teorema 1.9. *Sea κ un número cardinal infinito. Para cualquier cardinal regular $\theta \geq 2^\kappa$ y cualquier $X \subseteq H(\theta)$ con $|X| \leq 2^\kappa$, existe un $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ tal que $X \subseteq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq 2^\kappa$ y además $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo κ-sucesiones; esto es, $\mathfrak{M}^\kappa \subseteq \mathfrak{M}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{M}_0 \prec H(\theta)$ tal que $X \subseteq \mathfrak{M}_0$ y para cada $0 < \alpha < \kappa^+$ tomemos $\mathfrak{M}_\alpha \prec H(\theta)$ tal que $\mathfrak{M}_\beta \cup \mathfrak{M}_\beta^\kappa \subseteq \mathfrak{M}_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$ y $|\mathfrak{M}_\alpha| \leq 2^\kappa$. Pongamos

$$\mathfrak{M} = \bigcup \left\{ \mathfrak{M}_\alpha : \alpha \in \kappa^+ \right\}.$$

Entonces $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ y claramente $X \subseteq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq 2^\kappa$. Nos resta demostrar que $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo κ-sucesiones. Supongamos que $f : \kappa \to \mathfrak{M}$. Ya que existe $\beta \in \kappa^+$ tal que $f(\alpha) \in \mathfrak{M}_\beta$ para todo $\alpha \in \kappa$, se sigue que $f \in \mathfrak{M}_{\beta+1}^\kappa$ y así $f \in \mathfrak{M}$. $\square$

Detengámonos un momento para hacer una valiosa observación. Supongamos que $\mathfrak{M}$ es un submodelo elemental numerable de $H((2^\mathfrak{c})^+)$ de modo que los reales $\mathbb{R}$ están en $\mathfrak{M}$. Entonces $\mathfrak{M} \models$ "$\mathbb{R}$ es no numerable" aunque $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ sea solamente numerable. No hay nada paradójico aquí: $\mathfrak{M}$ piensa que $\mathbb{R}$ es no numerable no que $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ lo es. De hecho, el conjunto $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ no es ni siquiera un elemento de $\mathfrak{M}$, con lo que $\mathfrak{M}$ no puede pensar algo acerca de él. Si $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$, entonces $\mathfrak{M} \models \varphi(m) \Leftrightarrow H(\theta) \models \varphi(m)$ se cumple para elementos de $\mathfrak{M}$ y en general ninguna de las implicaciones $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow X \subseteq \mathfrak{M}$, $X \subseteq \mathfrak{M} \Rightarrow X \in \mathfrak{M}$ se cumple. Sin embargo en algunos casos $X \in \mathfrak{M}$ sí implica $X \subseteq \mathfrak{M}$.

Teorema 1.10. *Si $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$, θ es regular y $\kappa \in \mathfrak{M}$ es un cardinal tal que $\kappa \subseteq \mathfrak{M}$, entonces para todo $X \in \mathfrak{M}$ con $|X| \leq \kappa$, X es un subconjunto de $\mathfrak{M}$. En particular, cada elemento numerable de $\mathfrak{M}$ es un subconjunto de $\mathfrak{M}$.*

Demostración. Si $|X| \leq \kappa$, entonces $H(\theta) \models \exists f : \kappa \twoheadrightarrow X$. Como κ, X son elementos de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models \exists f : \kappa \twoheadrightarrow X$. De ahí que existe $f \in \mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models$ "f hace corresponder κ sobre X". Analizando todas las propiedades que f debe tener en $\mathfrak{M}$ para ser realmente una función: f es un conjunto de pares ordenados, f es una función, el dominio de f es κ, el rango de f es X; cada una de ellas debe ser cierta para f o de otro modo $\mathfrak{M}$ poseería un testigo de la falla. Ahora que, no es suficiente saber que $\mathfrak{M} \models \mathrm{ran}(f) = X$ para concluir que $X \subseteq \mathfrak{M}$. Sin embargo, hemos supuesto que $\mathrm{dom}(f) = \kappa$ es un subconjunto de $\mathfrak{M}$. Sea $x \in X$.Ya que f es realmente sobreyectiva, podemos elegir $\alpha \in \kappa$ tal que $(\alpha, x) \in f$. No podemos referirnos a x como un elemento de $\mathfrak{M}$, pero podemos usar que $\mathfrak{M} \models (\exists y)\,(\alpha, y) \in f$ así seleccionar un $y \in \mathfrak{M}$ tal que $(\alpha, y) \in f$. Claramente $H(\theta) \models x = y$ y con esto obtenemos que $x \in \mathfrak{M}$ como queríamos demostrar. □

Exploremos ahora el otro método por el que se presentan los submodelos elementales para sus aplicaciones en la literatura. Además de que este segundo método tiene la ventaja de que es más rápido de introducir, está basado únicamente en la siguiente proposición de la cual podemos dar una demostración combinatoria. Otra ventaja, si así se quiere ver, es que no usa nociones de teoría de modelos. Sin embargo, usa la noción de fórmula; pero reemplazando con una fórmula fija φ en esta proposición obtenemos una proposición puramente matemática la cual ni siquiera involucra la noción de fórmula o variables libres. Así, aunque la Proposición 1.11 es metamatemática, es un esquema para infinitas proposiciones matemáticas.

Proposición 1.11. *Sea $\varphi(x, v_1, \ldots, v_n)$ una fórmula de la teoría de conjuntos. Si X es cualquier conjunto, entonces existe un conjunto $\mathfrak{M} \supseteq X$ tal que $|\mathfrak{M}| \leq |X| \cdot \aleph_0$, y siempre que hay $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{M}$ tales que existe algún x para el que se tiene $\varphi(x, m_1, \ldots, m_n)$, entonces existe algún $m \in \mathfrak{M}$ tal que $\varphi(m, m_1, \ldots, m_n)$.*

Demostración. Construyamos inductivamente una sucesión de conjuntos

$$\{\mathfrak{M}_n : n \in \omega\}$$

de manera que $\mathfrak{M}_0 \supseteq X$ y, para cada $n \in \omega$, $\mathfrak{M}_{n+1} \supseteq \mathfrak{M}_n$, $|\mathfrak{M}_n| \leq |\mathfrak{M}_0| + \aleph_0$ y de forma que, siempre que haya $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{M}_n$ tal que exista un x para el cual $\varphi(x, m_1, \ldots, m_n)$, entonces exista un $x \in \mathfrak{M}_{n+1}$ tal que $\varphi(x, m_1, \ldots, m_n)$. Finalmente sea $\mathfrak{M} = \bigcup \{\mathfrak{M}_n : n \in \omega\}$, entonces $|\mathfrak{M}| \leq |X| + \aleph_0$ y $\mathfrak{M}$ refleja la fórmula $(\exists x)\varphi$. □

Una palpable modificación de la demostración anterior nos provee de un conjunto $\mathfrak{M}$ el cual funciona simultáneamente para una cantidad finita de fórmulas.

Corolario 1.12. *Hay tres fórmulas de manera que, si* $\mathfrak{M}$ *satisface la proposición 1.11 para estas tres fórmulas y un conjunto* X*, entonces cualquier subconjunto finito de* $\mathfrak{M}$ *es un elemento de* $\mathfrak{M}$*.*

Demostración. Consideremos las siguientes fórmulas:

$\varphi_1(x, v_1)$ dice que $x = \{v_1\}$, $\varphi_2(x, v_1, v_2)$ dice que $x = v_1 \cup v_2$, $\varphi_3(x)$ dice que $(\forall w \in x)\,(w \neq w)$.

Ahora sea $\mathfrak{M}$ un conjunto tal que $X \subseteq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq |X| + \aleph_0$ y $\mathfrak{M}$ refleje

$$(\exists x)\varphi_1,\ (\exists x)\varphi_2,\ (\exists x)\varphi_3.$$

Afirmamos que cualquier subconjunto finito de $\mathfrak{M}$ es un elemento de $\mathfrak{M}$. Por inducción sobre n, demostraremos que $(\forall F \subseteq \mathfrak{M})\,(|F| = n \Rightarrow F \in \mathfrak{M})$.

Si $n = 0$ entonces $F = \emptyset$ y $F \in \mathfrak{M}$, pues $\mathfrak{M}$ refleja $(\exists x)\varphi_3$. Si lo suponemos para n y $F \subseteq \mathfrak{M}$ tiene $n+1$ elementos, sea $m \in F$, entonces $\{m\} \in \mathfrak{M}$ en vista de que $\mathfrak{M}$ refleja $(\exists x)\varphi_1$ y $F \setminus \{m\} \in \mathfrak{M}$. Ahora sea $m_1 = \{m\}$, $m_2 = F \setminus \{m\}$ así es que hay algún x tal que $\varphi_2(x, m_1, m_2)$, y hay algún $\widetilde{m} \in \mathfrak{M}$ tal que $\varphi_2(\widetilde{m}, m_1, m_2)$ supuesto que $\mathfrak{M}$ refleja $(\exists x)\varphi_2$; es decir, $\widetilde{m} = \{m\} \cup (F \setminus \{m\}) = F \in \mathfrak{M}$. □

La demostración del corolario es típica de cómo se procedería formalmente si se usa este segundo método. Por ejemplo, para realizar la demostración del Teorema 1.10 con este segundo método se tomaría $\varphi_0(x, v_1, v_2)$ diciendo que x es una función sobreyectiva de v_1 a v_2 y $\varphi(x, v_1, v_2, v_3, v_4)$ diciendo que v_4 es una función sobreyectiva de v_1 a v_2, $v_3 \in v_1$ y $x = v_4(v_3)$. Como haremos notar en nuestros primeros ejemplos en la siguiente sección, en la práctica se ignoran estos formalismos.

Una vez que una fórmula particular φ o un grupo finito de fórmulas φ_i son elegidas, la demostración de la instancia de la Proposición 1.11 es también puramente matemática y no involucra nociones metamatemáticas. Dado que hemos dado una demostración puramente combinatoria de la Proposición 1.11 para cada elección particular de una fórmula φ, la aplicación de submodelos elementales puede ser removida simplemente reemplazándola con la particular instancia de la demostración autocontenida que hemos dado. Y esto es por lo que una aplicación de los submodelos elementales a la topología es formalmente innecesaria.

2. Primeros ejemplos

Empezaremos con ejemplos usando el segundo método. En la práctica, en cualquier momento en una demostración, un conjunto $\mathfrak{M}$ puede ser construido satisfaciendo la Proposición 1.11 para cierto grupo finito de fórmulas aún por ser elegido pero lo cual no depende de la elección particular de $\mathfrak{M}$ que hayamos hecho. Entonces como la demostración procede, siempre que encontremos una sentencia cierta que empiece con un cuantificador existencial e involucre parámetros de $\mathfrak{M}$, podremos cambiar el cuantificador por uno relativizado a $\mathfrak{M}$ y aún tener una sentencia cierta. Ejemplificaremos esto a continuación. También, dado que propiamente nuestros dos métodos son equivalentes, aunque estemos usando la técnica basada en el segundo método asumiremos cierto todo lo que ya hemos demostrado para submodelos elementales; por ejemplo el Teorema 1.9. Demostraciones detalladas de todos aquellos resultados pueden darse, escribiendo de manera precisa en cada caso, qué fórmulas son las que se pretende reflejar.

Proposición 2.1 (Stephenson Jr.)**.** *Sea (X, τ) un espacio numerablemente compacto y B cualquier subconjunto de X de cardinalidad no mayor que $2^{\aleph_0}$. Entonces existe un subconjunto numerablemente compacto G de X tal que $B \subseteq G$ y $|G| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea $\varphi(x, v_1, v_2, v_3)$ la fórmula

$$x \in v_1 \wedge (\forall w \in v_2)\,(x \in w \Rightarrow |w \cap v_3| = |v_3|)$$

o, en lenguaje común, "x es un punto de acumulación completo de v_3 en el espacio topológico (v_1, v_2)".

Sea $A = B \cup \{X, \tau\}$. Apliquemos el Teorema 1.9 para obtener un conjunto $\mathfrak{M}$ tal que $A \subseteq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{M}$ refleje la fórmula $(\exists x)\varphi$ y es cerrado bajo ω-sucesiones. Afirmamos que $G = X \cap \mathfrak{M}$ tiene las propiedades requeridas. Claramente $B \subseteq G$ y $|G| \leq 2^{\aleph_0}$; resta demostrar que G es numerablemente compacto. Sea $S \in [G]^\omega$, entonces $S \in \mathfrak{M}$ ya que $S \in [\mathfrak{M}]^\omega$ y $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo ω-sucesiones. Ahora sea $m_1 = X,\ m_2 = \tau,\ m_3 = S$. Por la compacidad numerable de X se sigue que existe algún x tal que $\varphi(x, m_1, m_2, m_3)$. Puesto que $m_1, m_2, m_3 \in \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}$ refleja $(\exists x)\varphi$ existe $m \in \mathfrak{M}$ tal que $\varphi(m, m_1, m_2, m_3)$; es decir, existe un punto de acumulación completo de S en G; por lo tanto, G es numerablemente compacto. $\square$

Proposición 2.2 (Pospišil)**.** *Cualquier espacio Hausdorff que sea primero numerable y tenga un subconjunto denso de cardinalidad no mayor que $2^{\aleph_0}$ tiene cardinalidad no mayor que $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea $\varphi(x, v_1, v_2, v_3)$ la fórmula

$$x \in v_3 \wedge (\forall w \in v_1)\,(x \in w \Rightarrow |v_2 \backslash w| < \aleph_0)$$

o, en lenguaje común, "todos a excepción de una cantidad finita de puntos de v_2 están en cualquier conjunto abierto de (v_3, v_1) que contenga a x". Sea D un subconjunto denso de X tal que $|D| \leq 2^{\aleph_0}$ y sea $A = D \cup \{X, \tau\}$. Aplicando el Teorema 1.9 podemos obtener un conjunto $\mathfrak{M}$ tal que $A \subseteq \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| \leq 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{M}$ refleje $(\exists x)\varphi$ y sea cerrado bajo ω-sucesiones. Ahora afirmamos que $X \cap \mathfrak{M}$ es cerrado en X. Si $x \in \overline{X \cap \mathfrak{M}}$, entonces hay una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en $X \cap \mathfrak{M}$ tal que $x_n \to x$. Dado que $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo ω-sucesiones, se sigue que $\{x_n : n \in \omega\} \in \mathfrak{M}$. Ahora sea $m_1 = \tau,\ m_2 = \{x_n\}_{n\in\omega}$ y $m_3 = X$. Hay un x tal que $\varphi(x, m_1, m_2, m_3)$ pues $x_n \to x,\ m_1, m_2, m_3 \in \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}$ refleja $(\exists x)\varphi$, se debe tener que hay un $y \in \mathfrak{M}$ tal que $\varphi(y, m_1, m_2, m_3)$; o sea que también tenemos que $x_n \to y$. Pero X es Hausdorff, entonces $x = y$. Por lo tanto $X = \overline{D} \subseteq \overline{X \cap \mathfrak{M}} = X \cap \mathfrak{M}$ y $X \subseteq \mathfrak{M}$. En consecuencia, $|X| \leq 2^{\aleph_0}$. $\square$

En la práctica, en realidad, no veríamos una demostración como la que acabamos de dar; digamos que es demasiado formal. En la práctica por lo regular no se mencionan explícitamente las fórmulas que se pretende reflejar y de hecho se asume que $\mathfrak{M}$ refleja una cantidad suficiente de fórmulas. Uno vería algo como: Sea D un subconjunto denso de X tal que $|D| \leq 2^{\aleph_0}$. Tomemos un submodelo elemental $\mathfrak{M}$ de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ el cual contiene X, cada elemento de D y que es cerrado bajo ω-sucesiones. Mostremos que $X \cap \mathfrak{M}$ es cerrado. Si $x \in \overline{X \cap \mathfrak{M}}$, entonces hay una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq X \cap \mathfrak{M}$ tal que $x_n \to x$. Claramente $\overline{\{x_n\}}_{n\in\omega} = \{x_n\}_{n\in\omega} \cup \{x\}$. Ahora como $\overline{\{x_n\}}_{n\in\omega}$ es definible en $\mathfrak{M}$ tenemos que $\overline{\{x_n\}}_{n\in\omega} \in \mathfrak{M}$. Por lo tanto $\overline{\{x_n\}}_{n\in\omega} \subseteq \mathfrak{M}$, así $x \in X \cap \mathfrak{M}$. Con todo, $X = \overline{D} \subseteq \overline{X \cap \mathfrak{M}} = X \cap \mathfrak{M}$; es decir, $X \subseteq \mathfrak{M}$ y $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.

En el párrafo anterior dijimos que $\overline{\{x_n\}}_{n\in\omega} \in \mathfrak{M}$ porque es *definible en* $\mathfrak{M}$. Esto significa, en este caso, que $\mathfrak{M}$ fue explícitamente seleccionado para reflejar también la fórmula $(\exists z)\psi(z, v_1, v_2, v_3)$, donde

$$z \subseteq v_3 \wedge (\forall w)\,(w \in z \Leftrightarrow (\forall u)\,[(u \in v_2 \wedge w \in u) \Rightarrow u \cap v_1 \neq \emptyset]),$$

o con lenguaje corriente "z es la clausura de v_1 en el espacio topológico (v_3, v_2)". Ahora sea $m_1 = \{x_n\}_{n\in\omega}$, $m_2 = \tau$ y $m_3 = X$. La sentencia

$$(\exists z)\psi(z, m_1, m_2, m_3)$$

dice que hay un subconjunto z de X el cual es la clausura de $\{x_n\}_{n\in\omega}$. Como m_1, m_2, $m_3 \in \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}$ refleja $(\exists z)\psi$, hay un $Z \in \mathfrak{M}$ tal que $\psi(Z, m_1, m_2, m_3)$. Así $Z = \overline{\{x_n\}}_{n\in\omega} \in \mathfrak{M}$. En general se dice que *x es definible* si existe una fórmula tal que $(\exists! x)\,\varphi(x)$, y generalizando lo antes dicho uno llega a que, sin importar qué método estemos considerando, cualquier conjunto definible es elemento de nuestro submodelo elemental; en particular, $\emptyset, \omega, \omega_n, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\mathfrak{c}$, $\sqrt{2}$, etc. son siempre elementos de $\mathfrak{M}$.

De ahora en adelante no vamos a hacer explícito cuál de los métodos estaremos empleando para demostrar nuestros ejemplos y usaremos el que mejor se adapte a nuestro propósito particular. Un artículo donde se presenta una demostración del mismo teorema con tres estilos: el tradicional sin emplear submodelos elementales, el del primer método y el del segundo método; además de ser muy accesible y que contiene mucho de lo que aquí hemos comentado es [11]. S. Watson es uno de los investigadores que más tratan de impulsar el segundo método.

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio topológico (X, τ) se dice *punto numerable* si para cada $x \in X$ se tiene que $|\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}| = \aleph_0$. Una *base punto numerable* es una base para (X, τ) que es punto numerable.

Proposición 2.3. *Si X es numerablemente compacto y tiene una base punto numerable, entonces X es metrizable.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una base punto numerable para X. Si demostramos que X tiene un subconjunto denso numerable D, entonces podremos escribir

$$\mathcal{U} = \bigcup \{\{U \in \mathcal{U} : x \in U\} : x \in D\};$$

y por lo tanto, $|\mathcal{U}| \leq \aleph_0$ que unido al hecho de que X es numerablemente compacto nos proporciona que X es compacto. Así tendremos que X es regular y segundo numerable. Es decir, X será metrizable.

Consideremos un cardinal regular θ suficientemente grande y $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ tal que $\{X, \mathcal{U}\} \subseteq \mathfrak{M}$ y $|\mathfrak{M}| = \aleph_0$. Afirmamos que $X \cap \mathfrak{M}$ es denso en X. Supongamos lo contrario y tomemos $z \in X \setminus (\overline{X \cap \mathfrak{M}})$. Para cada $x \in \overline{X \cap \mathfrak{M}}$ podemos elegir conjuntos $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ y $z \notin U_x$. Más aún, podemos encontrar U_x en $\mathfrak{M}$ porque $U_x \cap (X \cap \mathfrak{M}) \neq \emptyset$ y entonces hay un $x_0 \in U_x \cap (X \cap \mathfrak{M})$, y dado que $\mathcal{U}_{x_0} = \{U \in \mathcal{U} : x_0 \in U\}$ es un elemento numerable de $\mathfrak{M}$, es por tanto un subconjunto de $\mathfrak{M}$.

Consecuentemente, podemos cubrir $\overline{X \cap \mathfrak{M}}$ con elementos tomados de $\mathcal{U} \cap \mathfrak{M}$. Ahora, $\overline{X \cap \mathfrak{M}}$ es numerablemente compacto y $\mathcal{U} \cap \mathfrak{M}$ es una cubierta numerable para éste. Entonces, podemos elegir $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{M}$ tal que $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una cubierta de $\overline{X \cap \mathfrak{M}}$. Pero subconjuntos finitos de $\mathfrak{M}$ son, por el Corolario 1.12, elementos de $\mathfrak{M}$ y, por lo tanto tenemos que:

$$\mathfrak{M} \vDash \{U_1, \ldots U_n\} \text{ cubre } X.$$

Sin embargo, usando z obtenemos la contradicción que buscamos. □

Veamos ahora el siguiente ejemplo que hemos tomado del libro de R. Engelking (Teorema 3.1.29). Invitamos a consultar la demostración de Engelking para notar la diferencia y simplicidad de nuestro argumento. Más adelante daremos una versión mucho más general; quisimos presentar esta versión por ser sencilla y porque muestra una manera típica de cómo aplicar los submodelos elementales.

Dado un espacio topológico (X, τ) definimos el carácter de $x \in X$ como

$$\chi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base de } x \text{ en } X\} + \aleph_0$$

y el carácter de X es

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Teorema 2.4. *Si X es compacto, entonces $|X| \leq 2^{\chi(X)}$.*

Demostración. Pongamos $\chi(X) = \kappa$. Elijamos θ suficientemente grande y $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ tal que $X, \tau \in \mathfrak{M}$, $\kappa \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ sea cerrado bajo κ-sucesiones y $|\mathfrak{M}| \leq 2^\kappa$. Afirmamos que $X \cap \mathfrak{M}$ es cerrado en X.

Si $x \in \overline{X \cap \mathfrak{M}}$ entonces hay una red $\{x_\alpha \in X \cap \mathfrak{M} : \alpha \in \kappa\}$ que converge a x dado que $\chi(X) = \kappa$. Entonces $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \kappa} \in \mathfrak{M}$ ya que $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo κ-sucesiones. Ahora tenemos que $(\exists y)\,(x_\alpha \to y)$, y por elementaridad

$$(\exists y \in \mathfrak{M})\ (x_\alpha \to y).$$

Pero X es Hausdorff, entonces $x = y$ y así $x \in \mathfrak{M}$.

Ahora, para cada $x \in X \cap \mathfrak{M}$ podemos encontrar una base de vecindades $\mathcal{B}_x$ de x en X y por elementaridad podemos encontrar una en $\mathfrak{M}$; más aún, la podemos seleccionar de cardinalidad a lo más κ y dado que $\kappa \subseteq \mathfrak{M}$, por elementaridad nuevamente podemos suponer que $\mathcal{B}_x \subseteq \mathfrak{M}$.

Finalmente, supóngase que existe algún $y \in X \setminus (X \cap \mathfrak{M})$. Para cada $x \in X \cap \mathfrak{M}$ seleccione $B_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $y \notin B_x$. Usando la compacidad de X podemos hallar $x_1, \ldots, x_n \in X \cap \mathfrak{M}$ tal que $X \cap \mathfrak{M} \subseteq B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_n}$. Pero entonces tenemos que

$$\mathfrak{M} \models \{B_{x_1}, \ldots, B_{x_n}\} \text{ es una cubierta de } X;$$

sin embargo $y \in X \setminus (B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_n})$. □

Para nuestro siguiente ejemplo topológico necesitaremos de uno de los resultados combinatorios más usados en topología general y creemos que ésta es una buena ocasión para recordar el llamado "*Pressing Down Lemma*" dando una demostración de él usando nuestra técnica estelar.

Si S es un subconjunto de un ordinal β, una función $f : S \to \beta$ se dice *regresiva* si $(\forall \alpha \in S \setminus \{0\}) \, (f(\alpha) < \alpha)$.

Lemma 2.5 (Fodor)**.** *Si S es un subconjunto estacionario de un cardinal sucesor no numerable κ y si f es una función regresiva definida en S, entonces hay un $\alpha \in \kappa$ de manera que $f^{-1}(\{\alpha\})$ es estacionario.*

Demostración. Fijemos f como en la formulación del lema. Por la Proposición 1.8 (1) consideremos un submodelo elemental $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ de manera que $f \in \mathfrak{M}$ y $\delta = \mathfrak{M} \cap \kappa \in S$. Como $\xi = f(\delta) < \delta$, ξ es un elemento de $\mathfrak{M}$. Ahora sea $X = f^{-1}(\{\xi\})$ y apliquemos 1.8 (3) para deducir que X es estacionario en κ. □

Proposición 2.6. *ω_1 con la topología del orden no es metrizable.*

Demostración. Sea L el conjunto de puntos (ordinales) límite de ω_1. Entonces L es cerrado; si vemos que L no es un conjunto G_δ, entonces ω_1 no podrá ser metrizable. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos abiertos en ω_1 que contengan todos a L. Ahora, para cada $n \in \omega$, definamos $f_n : L \to \omega_1$ por

$$f(\alpha) = \text{mín}\,\{\beta < \alpha : (\beta, \alpha] \subseteq U_n\}\,,$$

para cada $\alpha \in L$. Entonces cada f_n es una función regresiva y por el "Pressing Down Lemma" hay un $A_n \in [S]^{\omega_1}$ tal que $f_n \restriction A_n$ es constante. Ahora elijamos $\gamma_n \in A_n$, pongamos $\beta_n = f_n(\gamma_n)$, para cada $n \in \omega$, y consideremos $\beta = \sup_{n \in \omega} \beta_n < \omega_1$. Como $|A_n| = \aleph_1$, podemos elegir $\alpha_n > \beta$ con $\alpha_n \in A_n$, para cada $n \in \omega$. Entonces, siendo $\beta < \alpha = \text{mín}_{n \in \omega} \alpha_n$, $(\beta, \alpha] \subseteq (\beta_n, \alpha_n] \subseteq U_n$, por lo que $\bigcap_{n \in \omega} U_n$ no puede ser L. □

Con el afán de presentar otra sencilla aplicación del Lema 2.5 veamos el siguiente contraste entre $\mathbb{R}$ y ω_1. Afirmamos que para cada punto x de $\mathbb{R}$ es posible elegir una sucesión en $\mathbb{R}$ que converja a x y de manera que dos cualesquiera de estas sucesiones no tengan términos en común. Aunque pareciera que eso es más fácil de lograrlo para ω_1 no es así. Para el caso de los números reales, simplemente enumeremos $\mathbb{R}$ como

$\{x^\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y elijamos recursivamente las sucesiones $(y_n^\alpha)_{n\in\omega}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$, de modo que

$$y_n^\alpha \in \left(\mathbb{R} \setminus \left\{y_n^\beta : n \in \omega,\ \beta < \alpha\right\}\right) \cap \left(x^\alpha - \tfrac{1}{n}, x^\alpha\right),$$

para cada $n \in \omega$.

Ahora supongamos que para ω_1 hemos elegido sucesiones $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ que convergen a α, para cada ordinal límite. Sin pérdida de generalidad supongamos que para cada $\alpha \in \omega_1$ y para cada $n \in \omega$ tenemos que $\alpha_n < \alpha$. Con estas consideraciones podemos demostrar no sólo que hay sucesiones con términos comunes, sino que, dado $m \in \omega$, podemos encontrar un conjunto estacionario en ω_1 de manera que para cualesquiera dos ordinales α y β en dicho conjunto, las respectivas sucesiones $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ y $(\beta_n)_{n\in\omega}$ coinciden en los m primeros términos. Por cierto, la idea no es nada complicada, simplemente defínanse funciones $f_n : L \to \omega_1$ mediante $f_n(\alpha) = \alpha_n$. Entonces recursivamente podemos encontrar conjuntos estacionarios S_k, para $k \leq m$, tales que $f_0 \restriction S_0$ sea constante y $(f_k \restriction S_{k-1}) \restriction S_k$ sea constante.

Otro de los resultados combinatorios muy empleados en topología general es el llamado Δ-lemma. Una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos es llamada Δ-sistema si hay un conjunto fijo R, llamado raíz del sistema, tal que $A \cap B = R$ siempre que A y B son distintos elementos de $\mathcal{A}$.

Lemma 2.7 (Šanin)**.** *Cualquier familia $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ de conjuntos finitos contiene un Δ-sistema no numerable.*

Demostración. Tomemos un submodelo numerable $\mathfrak{M}$ conteniendo $\mathcal{A}$. Podemos elegir $\delta \in \omega_1 \setminus \mathfrak{M}$. Sea $R = A_\delta \cap \mathfrak{M}$. En $\mathbf{V}$, sea $A \subseteq \omega_1$ tal que $\{A_\alpha : \alpha \in A\}$ es un Δ-sistema maximal con raíz R. Si $\mathfrak{M}$ contiene una biyección entre ω y A, entonces como todos los elementos de A estarían en $\mathfrak{M}$, con lo que δ también tendría que ser un elemento de $\mathfrak{M}$. Así, $\mathfrak{M}$ no contiene una biyección entre ω y A, así no existe tal biyección y A es no numerable. $\square$

Este es el principal resultado sobre Δ-sistemas. Hay otras versiones más generales que también pueden ser demostradas usando submodelos elementales.

En camino de preparación de nuestro último ejemplo de esta sección veamos las siguientes definiciones y lemas. Dado un espacio topológico (X, τ) se define el pseudocaracter de $x \in X$ como

$$\psi(x, X) = \text{mín}\left\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una familia de abiertos con } \bigcap \mathcal{B} = \{x\}\right\} + \aleph_0,$$

y el pseudocaracter de X es

$$\psi(X) = \sup\left\{\psi(x, X) : x \in X\right\}.$$

La estrechez de $x \in X$ es

$$t(x, X) = \text{mín}\left\{\kappa : (\forall A \subseteq X)(x \in \overline{A} \Rightarrow (\exists B \subseteq A)\,(|B| \leq \kappa \wedge x \in \overline{B}))\right\},$$

y la estrechez de X es definida por

$$t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\} + \aleph_0.$$

Lemma 2.8. *Si (X, τ) es un espacio topológico con $\psi(X) \leq \kappa$, si $\mathfrak{M}$ es un submodelo elemental de $H(\theta)$, con θ suficientemente grande, y tal que $X, \tau \in \mathfrak{M}$ y cerrado bajo κ-sucesiones; entonces si $z \in X \backslash \mathfrak{M}$, para cada $y \in X \cap \mathfrak{M}$ podemos seleccionar $U_y \in \tau \cap \mathfrak{M}$ tal que $y \in U_y$ y $z \notin U_y$.*

Demostración. Sea $y \in X \cap \mathfrak{M}$.

$$H(\theta) \models (\exists\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq \tau)\,(\{y\} = \bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha).$$

Por lo tanto, $\mathfrak{M}$ modela eso también; así sea $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\} \in \mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \{y\} = \bigcap_{\alpha\in\kappa} U_\alpha$. Ahora como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\kappa} \in \mathfrak{M}$ se sigue que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\kappa} \subseteq \mathfrak{M}$ y $H(\theta) \models \{y\} = \bigcap_{\alpha\in\kappa} U_\alpha$, con lo que se sigue que podemos elegir U_y como lo requiere el lema. $\square$

Uno de los teoremas más importantes del siglo apenas concluido es el famoso resultado de A.V. Arkhangel'skiĭ que resolvió la pregunta de Alexandroff y Urysohn que estuvo sin resolver por 50 años: ¿Hay un espacio compacto primero numerable de cardinalidad mayor que $\mathfrak{c}$? La genealidad de Arkhangel'skiĭ estableció que $|X| \leq 2^{\ell(X)\cdot\chi(X)}$ para X Hausdorff de lo que se sigue que un espacio Lindelöf primero numerable es de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. Aquí $\ell(X)$ denota el grado de Lindelöf de X que está definido mediante

$$\begin{aligned} \ell(X) = \min\{\kappa \geq \aleph_0 : (\forall \mathcal{U} \subseteq \tau)\,(X = \bigcup \mathcal{U} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U})\,(|\mathcal{V}| \leq \kappa \wedge X = \bigcup \mathcal{V})\}\,. \end{aligned}$$

Teorema 2.9. *Si (X, τ) es un espacio Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{\psi(X)\cdot t(X)\cdot \ell(X)}$.*

Demostración. Sean $\kappa = \psi(X) \cdot t(X) \cdot \ell(X)$ y θ un cardinal regular suficientemente grande. Tomemos $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ de cardinalidad 2^κ tal que $X, \tau \in \mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}$ sea cerrado bajo κ-sucesiones. Demostraremos que $X \subseteq \mathfrak{M}$.

Primero estableceremos que $X \cap \mathfrak{M}$ es cerrado en X. Sea $x \in \overline{X \cap \mathfrak{M}}$. Según $t(X) \leq \kappa$, podemos elegir $Y \subseteq X \cap \mathfrak{M}$ tal que $x \in \overline{Y}$ con $|Y| \leq \kappa$. Fijemos una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\kappa} \subseteq \tau$ de manera que $\{x\} = \bigcap_{\alpha\in\kappa} U_\alpha$. Ahora, usando que $\ell(X) \leq \kappa$, seleccionemos, para cada $\alpha \in \kappa$, una colección $\{U_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \kappa\} \subseteq \tau$ tal que $x \notin \overline{\bigcup\{U_{\alpha\beta} : \beta \in \kappa\}}$ y $X \backslash U_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in\kappa} U_{\alpha\beta}$. Se sigue que $\overline{Y} \backslash \{x\} = \bigcup\{\overline{Y}_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \kappa\}$ donde para cada $\alpha, \beta \in \kappa$, $Y_{\alpha\beta} = Y \cap U_{\alpha\beta}$. Pero como $\{Y_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \kappa\}$ es una colección de cardinalidad κ de subconjuntos de cardinalidad κ de $\mathfrak{M}$, la colección y cada miembro de ella es un elemento de $\mathfrak{M}$ ya que $\mathfrak{M}$ es cerrado bajo κ-sucesiones.

Ahora, si x no estuviera en $\mathfrak{M}$ tendríamos que

$$\mathfrak{M} \models \overline{Y} = \bigcup\{\overline{Y}_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \kappa\}\ ;$$

mientras que

$$H(\theta) \vDash x \in \overline{Y} \backslash \overline{Y}_{\alpha\beta} \text{ para cada } \alpha, \beta \in \kappa.$$

Por lo tanto, x debe ser un elemento de $\mathfrak{M}$. Esto establece nuestra afirmación.

Supongamos que $z \in X \backslash \mathfrak{M}$. Por el Lema 2.8 podemos elegir una cubierta $\mathcal{U} = \{U_y : y \in X \cap \mathfrak{M}\}$ tal que $z \notin U_y$ para cada $y \in X \cap \mathfrak{M}$. Como $X \cap \mathfrak{M}$ es cerrado en X, podemos elegir una subcolección $\mathcal{W}$ de $\mathcal{U}$ que también cubra $X \cap \mathfrak{M}$ y de cardinalidad no mayor que κ. Ahora $\mathcal{W}$ es un subconjunto de $\mathfrak{M}$ de cardinalidad κ y por lo tanto un elemento de $\mathfrak{M}$. Pero esta es una contradicción ya que entonces $\mathfrak{M} \vDash \mathcal{W}$ cubre X. $\square$

R. Hodel en [6] señala que uno adivinaría que la demostración original de Arkhangel'skiĭ es bastante difícil y él distingue por su dificultad la versión numerable de la no numerable; cree que la versión numerable debería estar dentro del alcance de cualquier estudiante en su primer año de posgrado. Por nuestra parte notemos que con nuestra técnica no existe distinción en cuanto a dificultad entre una y otra versión y que con sólo reemplazar $\aleph_0$ por κ, y viceversa, se pasa de una a otra versión. Así de conveniente es la técnica de los submodelos elementales.

3. Otros ejemplos

Hemos visto qué tan poderosa es la suposición de que el submodelo sea cerrado bajo κ-sucesiones. Tampoco podemos esperar que los submodelos numerables sean tan buenos como para tener éxito en muchas situaciones. De hecho, una típica construcción inductiva con frecuencia se lleva a cabo sin tanta dificultad a través de ordinales numerables. Por otro lado, muchas construcciones tienen considerable dificultad para pasar ω_1; así que podemos esperar alguna reflexión no trivial tomando submodelos elementales de cardinalidad $\aleph_1$ aún en la ausencia de la Hipótesis del Continuo, CH.

Una útil propiedad, la cual puede reemplazar el ser cerrado bajo ω-sucesiones es la propiedad de ser ω-cubriente. Diremos que un conjunto $\mathfrak{M}$ tiene la *propiedad de ser ω-cubriente* si para cada $A \subseteq \mathfrak{M}$ numerable existe un $B \in \mathfrak{M}$ numerable tal que $A \subseteq B$. Si $\langle \mathfrak{M}_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ es una $\in$-cadena elemental de submodelos elementales numerables de $H(\theta)$ tal que, para cada $\alpha \in \omega_1$, $\mathfrak{M}_\alpha \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}$, entonces claramente la unión de los $\mathfrak{M}_\alpha$'s es un submodelo elemental de $H(\theta)$ de cardinalidad $\aleph_1$ que tiene la propiedad de ser ω-cubriente.

El *peso* de un espacio topológico (X, τ) está definido por:

$$w(X) = \text{mín}\,\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base para la topología } \tau\} + \aleph_0.$$

Teorema 3.1 (Hajnal y Juhasz)**.** *Si todo subespacio de cardinalidad a lo más $\aleph_1$ tiene peso numerable, entonces el espacio mismo tiene peso numerable.*

Demostración. Sea (X, τ) como lo requiere la proposición. Supóngase que $(X, \tau) \in \mathfrak{M}$ donde $\mathfrak{M}$ es un submodelo elemental de $H(\theta)$ con la propiedad de ser ω-cubriente y de cardinalidad $\aleph_1$. Mostraremos primero que $\tau \cap \mathfrak{M}$ genera la topología de subespacio en $X \cap \mathfrak{M}$. En efecto, supóngase que $x \in X \cap \mathfrak{M}$ y U es una vecindad abierta de x. Pongamos $Y = (X \cap \mathfrak{M}) \setminus U$. Como $|Y| \leq \aleph_1$, entonces $w(Y) = \aleph_0$ y por lo tanto Y es un espacio separable. Sea $D \subseteq Y$ denso en Y con $|D| = \aleph_0$. Pero $\mathfrak{M}$ tiene la propiedad de ser ω-cubriente, entonces existe un $D' \in \mathfrak{M}$ tal que $D \subseteq D'$. Ahora $|D' \cup \{x\}| = \aleph_0$; por lo tanto, $w(D' \cup \{x\}) = \aleph_0$ y $D' \cup \{x\} \in \mathfrak{M}$, con lo que $\mathfrak{M} \models w(D' \cup \{x\}) = \aleph_0$; es decir, existe una base numerable para $D' \cup \{x\}$ en $\mathfrak{M}$, y así de elementos tomados de $\mathfrak{M}$. Ahora $\tau \in \mathfrak{M}$ y $U \in \tau$ es tal que $x \in U$, entonces podemos elegir $V \in \tau \cap \mathfrak{M}$ con $x \in V$ y $V \cap D' \subseteq U$. Así tenemos que $(X \cap \mathfrak{M}) \setminus U \subseteq \overline{D} \subseteq \overline{D' \setminus V} \subseteq X \setminus V$; de aquí que $\mathfrak{M} \cap V \subseteq U$ como tenía que ser mostrado.

Finalmente, hay un subconjunto numerable $\mathcal{B}$ de $\tau \cap \mathfrak{M}$ el cual es base para $X \cap \mathfrak{M}$ ya que $w(X \cap \mathfrak{M}) = \aleph_0$ y $\tau \cap \mathfrak{M}$ genera la topología de subespacio. Podemos suponer que $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ por la propiedad de ser ω-cubriente. Pero ahora $\mathfrak{M} \models w(X) = \aleph_0$; por lo tanto, el resultado se sigue por elementaridad. □

A continuación vamos a presentar un teorema de metrización obtenido gracias al empleo de los submodelos elementales. Es uno de los resultados más famosos del profesor Alan Dow. Necesitaremos de dos lemas que seguidamente presentaremos.

Lemma 3.2. *Si un espacio (X, τ) tiene una base punto-numerable y $(X, \tau) \in \mathfrak{M} \prec H(\theta)$ entonces $\mathfrak{M}$ tiene base para cada punto de $\overline{X \cap \mathfrak{M}}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ como en la formulación del lema. Como $H(\theta) \models$ "(X, τ) tiene una base punto-numerable" y $\mathfrak{M}$ es un submodelo elemental, debe de existir $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ tal que

$$\mathfrak{M} \models \text{“}\mathcal{B} \text{ es una base punto numerable para } (X, \tau)\text{”}.$$

Puede verificarse que $\mathcal{B}$ es una base para (X, τ), en $H(\theta)$. También $H(\theta) \models$ "$\mathcal{B}$ es punto numerable" ya que eso se sigue de que

$$\mathfrak{M} \models (\forall x \in X)\ (|\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}| \leq \aleph_0)\,.$$

Sea x cualquier punto de $\overline{X \cap \mathfrak{M}}$ y supóngase que $B \in \mathcal{B}$ es una vecindad de x. Elijamos un $U \in \tau$ y $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \subseteq B$. Ahora seleccionemos $y \in W \cap \mathfrak{M}$ lo cual podemos hacer ya que $x \in \overline{X \cap \mathfrak{M}}$. Como $\mathcal{B}$ es punto numerable y $\{y, \mathcal{B}\} \in \mathfrak{M}$ se sigue que $\{S \in \mathcal{B} : y \in S\} \subseteq \mathfrak{M}$; por lo tanto, en particular $\{B, W\} \subseteq \mathfrak{M}$. Más aún, como $U \in \tau$ y $W \subseteq U \subseteq B$, se sigue que

$$\mathfrak{M} \models (\exists V \in \tau)\ (W \subseteq V \subseteq B)\,.$$

Así pues hay un $V \in \tau \cap \mathfrak{M}$ tal que $x \in V \subseteq B$ como quería probarse. □

Lemma 3.3. *Sea (X, τ) un espacio numerablemente compacto y sea $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$, con θ suficientemente grande, tal que $\mathfrak{M}$ es numerable y $X \in \mathfrak{M}$. Si $\tau \cap \mathfrak{M}$ no es una base para (X, τ) entonces existe un $z \in \overline{X \cap \mathfrak{M}}$ tal que $\tau \cap \mathfrak{M}$ no es una base en z.*

Demostración. Claramente podemos también asumir que $X \cap \mathfrak{M}$ no es denso en X, así que podemos elegir cualquier $z \in X \setminus \overline{X \cap \mathfrak{M}}$. Ahora si $\tau \cap \mathfrak{M}$ contiene una base para todos los puntos de $\overline{X \cap \mathfrak{M}}$ entonces hay una cubierta $\mathcal{U} \subseteq \tau \cap \mathfrak{M}$ de $\overline{X \cap \mathfrak{M}}$ cuya unión no contiene z. El resto de la demostración está contenido en el último párrafo de la demostración del Teorema 2.3. □

Teorema 3.4 (Dow)**.** *Si cualquier subespacio de cardinalidad $\aleph_1$ de un espacio numerablemente compacto es metrizable, entonces el espacio mismo es metrizable.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio como en la hipótesis del teorema y supongamos que (X, τ) no es metrizable. Consideremos un cardinal regular θ suficientemente grande y un submodelo elemental $\mathfrak{M} \prec H(\theta)$ tal que $(X, \tau) \in \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| = \aleph_1$ y $\mathfrak{M}$ tenga la propiedad de ser ω-cubriente. Veremos que $X \cap \mathfrak{M}$ con la topología de subespacio no es metrizable; esa contradicción establecerá el resultado.

Dado que todos los espacios métricos compactos son segundo numerables, por el Teorema 3.1 sabemos que debe existir un subespacio Z de X con $|Z| = \aleph_1$ y $w(Z) > \aleph_0$. Por elementaridad, hay un tal subespacio Z en $\mathfrak{M}$; así asumamos que $Z \in \mathfrak{M}$. Como X es numerablemente compacto y $w(Z)$ es no numerable sabemos que $\overline{Z}$ no es metrizable; por lo que podríamos suponer que $X = \overline{Z}$.

Según nuestras suposiciones $Z \cup \{x\}$ es metrizable para cada $x \in X \cap \mathfrak{M}$. Por consiguiente $\mathfrak{M} \vDash$ "$Z \cup \{x\}$ es metrizable". Ahora, para cada $x \in X \cap \mathfrak{M}$, tenemos que X es regular en x. En efecto, supóngase que $U \in \tau$ es una vecindad de x tal que $\overline{V} \setminus U \neq \emptyset$ para toda vecindad V de x. Por elementaridad, podemos asumir que $U \in \mathfrak{M}$. Sin embargo, existe una vecindad V de x tal que $\overline{V} \cap \mathfrak{M} \subseteq U$ ya que, siendo metrizable, $X \cap \mathfrak{M}$ es regular en x. Por otro lado, $Z \cup \{x\}$ es metrizable, luego primero numerable en x, y por consiguiente podemos encontrar $W \in \mathfrak{M}$ vecindad de x tal que $W \cap Z \subseteq V$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{M} \vDash \overline{W} \subseteq U,$$

puesto que $W, U \in \mathfrak{M}$. Así obtenemos una contradicción en vista de que $\mathfrak{M} \vDash \overline{W} \subseteq U$, pero $H(\theta) \vDash \overline{W} \setminus U \neq \emptyset$. Esta contradicción establece que X es regular en x. Obsérvese el importante papel de Z para obtener que $W \in \mathfrak{M}$.

Notemos ahora que X debe ser primero numerable en cada punto de $x \in X \cap \mathfrak{M}$. En efecto, como $Z \in \mathfrak{M}$ y $|Z| = \aleph_1$, se debe tener que $Z \subseteq \mathfrak{M}$, y así $X \cap \mathfrak{M}$ es denso en X. Luego, si $x \in X \cap \mathfrak{M}$; entonces como $X \cap \mathfrak{M}$ es metrizable debe existir una colección numerable $\mathcal{B}$ de abiertos en X tales que su traza a $X \cap \mathfrak{M}$ es una base para las vecindades de x, en $X \cap \mathfrak{M}$. Afirmamos que $\mathcal{B}$ es una base, en X, para las vecindades de x. Para ver esto sea U un abierto de X con $x \in U$. Por regularidad podemos hallar un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, y para este V existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \cap (X \cap \mathfrak{M}) \subseteq V$. Entonces $\overline{B} = \overline{B \cap (X \cap \mathfrak{M})} \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Para continuar afirmamos que: $\tau \cap \mathfrak{M}$ genera la topología de subespacio sobre $X \cap \mathfrak{M}$. Denotaremos esta topología por $\tau_{\mathfrak{M}}$. Si $x \in X \cap \mathfrak{M}$, sabemos que X es primero numerable en x. Entonces existe una base numerable $\mathcal{B}_x$ para X en el punto x y por elementaridad podemos elegir esa base en $\mathfrak{M}$; más aún, podemos asumir $\mathcal{B}_x \subseteq \mathfrak{M}$. Esto establece que $\tau_{\mathfrak{M}}$ genera la topología de subespacio.

Así demostraremos que $(X \cap \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}})$ no es metrizable. Sea $\{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una $\in$-cadena continua de submodelos elementales numerables de $\mathfrak{M}$ tal que $(X, \tau) \in \mathfrak{M}_0$ y cuya unión sea $\mathfrak{M}$. Usando el Lema 3.3 vemos que, para cada $\alpha \in \omega_1$, tenemos que existe $x \in \overline{X \cap \mathfrak{M}_\alpha}$ tal que $\tau \cap \mathfrak{M}_\alpha$ no contiene una base en el punto x. Ya que $\{\text{X},\tau, \mathfrak{M}_\alpha\} \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}$, hay de hecho un $x \in \mathfrak{M}_{\alpha+1} \cap \overline{X \cap \mathfrak{M}_\alpha}$ tal que $\tau \cap \mathfrak{M}_\alpha$ no contiene una base en el punto x.

Finalmente, supóngase que $(X \cap \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}})$ es metrizable; entonces tiene una base punto-numerable. Sea $\mathfrak{N}$ un submodelo elemental numerable de $H(\theta)$ tal que

$$\{X, \mathfrak{M}, \tau, \{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha \in \omega_1\}\} \subseteq \mathfrak{N}.$$

Pongamos $\alpha = \mathfrak{N} \cap \omega_1$ y consideremos un punto $x \in \mathfrak{M} \cap \overline{X \cap \mathfrak{M}_\alpha}$ tal que $\tau \cap \mathfrak{M}_\alpha$ no contiene una base de vecindades para x. Pero ahora, $\mathfrak{N} \models \mathfrak{M} = \bigcup \{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha \in_1\}$, por ello

$$\tau \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \bigcup \{\tau \cap \mathfrak{M}_\beta : \beta \in \alpha\}.$$

En consecuencia, $(\tau \cap \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{N}$ no contiene una base local para $x \in \overline{X \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}}$, lo cual contradice el Lema 3.2. $\square$

Hay un ejemplo fácil de un espacio no metrizable que tiene sus subespacios de cardinalidad $\aleph_1$ metrizables: Sea $X = Y \cup \{\infty\}$, donde $|Y| > \aleph_1$ y $\infty \notin Y$; Y es un subespacio discreto y abierto de X y las vecindades de ∞ son aquellos subconjuntos de X con complemento de cardinalidad a lo más $\aleph_1$. Entonces subespacios de cardinalidad $\aleph_1$ son discretos y por lo tanto metrizables.

Por otra parte, no es posible cambiar "numerablemente compacto" por "Lindelöf"; al menos bajo el Axioma de Martin más la negación de la Hipótesis del Continuo, $\mathsf{MA}+\neg\mathsf{CH}$. Esto se establece como sigue. Recuerde que el espacio doble de Alexandroff sobre $I \times 2$ (en donde $I = [0, 1]$ es el intervalo unitario) es obtenido declarando $I \times \{1\}$ como abierto y discreto mientras que una vecindad básica para $\langle r, 0\rangle$ es de la forma $U \times 2 \setminus \{\langle r, 1\rangle\}$ donde $r \in U$ es un abierto en I. Si $B \subseteq I$ es cualquier conjunto no numerable que no contiene cerrados no numerables (lo que es llamado un conjunto de Bernstein), entonces $X = (I \setminus B \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ es un subespacio Lindelöf no metrizable. X es Lindelöf, porque si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces podemos elegir una subcubierta numerable $\mathcal{U}'$ tal que $(I \setminus B) \times \{0\} \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$, y como B es un conjunto de Bernstein, $B \times \{1\} \setminus \bigcup \mathcal{U}'$ es a lo más numerable. Por otro lado, sea A es un subespacio de X de cardinalidad $\aleph_1$. Pensemos por un momento en A como subespacio I. Asumiendo $\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$ obtenemos que $A \cap B$ es un subconjunto F_σ de A. O sea que podemos pensar que $A \cap B = \bigcup_{n \in \omega} F_n$, donde cada F_n es cerrado en A con la topología de subespacio de I. Esto nos da posibilidad de encontrar una base σ-localmente finita para A como subespacio de X y usar el Teorema de Metrización de Nagata-Smirnov [5, pag. 282]. En efecto, $A_0 = A \cap (I \setminus B \times \{0\})$ es obviamente metrizable y por lo tanto podemos suponer la existencia de familias $\mathcal{U}_n$, para cada $n \in \omega$, de abiertos en A cuyas restricciones a A_0 forman una familia localmente finita y que la unión de todas estas familias forman una base para A_0. Entonces haciendo $\mathcal{B}_n = \mathcal{U}_n \cup \{\{\langle x, 1\rangle\} : x \in B \cap F_n\}$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$ obtenemos una base σ-localmente finita para A.

4. Ejemplos en βX

Un subespacio $\sum(a)$ de un producto topológico $Z = \prod_{\alpha\in A} \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es un $\sum$-*producto basado en* $a \in Z$ si para cada $b \in \sum(a)$ se tiene que

$$|\{b_\alpha \neq a_\alpha : \alpha \in A\}| \leq \aleph_0.$$

Los $\sum$-productos son subespacios densos de los productos topológicos.

Teorema 4.1 (Corson; Glicksberg). *Si* $X = \sum(a) \subseteq 2^\kappa$ *es un* $\sum$-*producto, entonces* $\beta X = 2^\kappa$.

Demostración. Es suficiente mostrar que $f \in C^*(X)$ puede ser extendida a alguna $g \in C(2^\kappa)$. Tomemos un submodelo elemental numerable conteniendo a, f y κ. Sea $S = \mathfrak{M} \cap \kappa$. Si $x \in 2^\kappa$, entonces defina

$$g(x) = f\left(x \restriction S \cup a \restriction (\kappa \setminus S)\right).$$

Como g es una composición de funciones continuas, es una función continua. Nos resta demostrar que g extiende a f. Supóngase que $x \in \sum(a)$ y

$$f(x) \neq f\left(x \restriction S \cup a \restriction (\kappa \setminus S)\right).$$

Hay intervalos ajenos I_0 y I_1, y funciones parciales finitas σ_0 y σ_1 con $\mathrm{dom}(\sigma_0) = \mathrm{dom}(\sigma_1)$, $\sigma_0 \subseteq x$, $\sigma_1 \subseteq x \restriction S \cup a \restriction (\kappa \setminus S)$ y $f([\sigma_i]) \subseteq I_i$. Escribamos $\sigma_1 = \sigma_1^S \cup \sigma_1^T$ donde $\sigma_1^S = \sigma_1 \restriction S$ y $\sigma_1^T = \sigma_1 \restriction (\kappa \setminus S)$. Sea $n = \left|\sigma_1^T\right|$. Así existe $F \in [\kappa]^n$ tal que cualquier función en $\left[\sigma_1^S\right]$ la cual coincide con a sobre F es enviada dentro de I_1 bajo f. Por elementaridad, podemos elegir $F \in \mathfrak{M}$ y sea $\sigma_2 \in a \restriction F$. Ahora, σ_0 y $\sigma_1 \cup \sigma_2$ son funciones parciales compatibles cuyos conjuntos básicos generados (no ajenos) son enviados bajo f dentro de los intervalos ajenos I_0 y I_1, respectivamente. Esto es una contradicción. $\square$

Example 4.2 (Comfort). *Hay un espacio no separable* X *tal que* βX *es separable.*

Demostración. Sea $X = \sum(0)$ un $\sum$-producto en 2^{ω_1}. Entonces $\beta X = 2^{\omega_1}$ el cual es separable por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery. Para mostrar que X no es separable, supóngase que $\{d_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto denso numerable. Sea $D = \bigcup \left\{d_n^{-1}(1) : n \in \omega\right\}$. Ya que $|D| = \aleph_0$, encontremos $\alpha \in \omega_1 \setminus D$. El conjunto abierto básico de todos los elementos de X los cuales envían α al 1 no intersecta este supuesto conjunto denso. $\square$

Teorema 4.3 (Fedeli y Watson)**.** *Sea X un espacio normal de estrechez numerable y sea $\mathfrak{M}$ un submodelo elemental de $H(\theta)$, donde θ es un cardinal regular suficientemente grande, tal que $X \in \mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M}| = 2^{\aleph_0}$ y el cual sea cerrado bajo ω-sucesiones. Entonces $X \cap \mathfrak{M}$ está C^*-encajado en X.*

Demostración. Sean C, F dos subconjuntos de $X \cap \mathfrak{M}$ los cuales están completamente separados en $X \cap \mathfrak{M}$. Se afirma que C y F están completamente separados en X (y por lo tanto $X \cap \mathfrak{M}$ está C^*-encajado en X). Claramente $\mathrm{cl}_{X\cap\mathfrak{M}}(C) \cap \mathrm{cl}_{X\cap\mathfrak{M}}(F) = \emptyset$.

Veamos que $\mathrm{cl}_X(C) \cap \mathrm{cl}_X(F) = \emptyset$. Supóngase que hay un punto $x \in \mathrm{cl}_X(C) \cap \mathrm{cl}_X(F)$. Como X tiene estrechez numerable, hay conjuntos $A \in [C]^\omega$ y $B \in [F]^\omega$ tales que $x \in \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(B)$. Como $A, B \in \mathfrak{M}$, por elementaridad hay un $x \in \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(B) \cap \mathfrak{M}$, así $x \in \mathrm{cl}_{X\cap\mathfrak{M}}(C) \cap \mathrm{cl}_{X\cap\mathfrak{M}}(F)$, lo cual es una contradicción. Así $\mathrm{cl}_X(C) \cap \mathrm{cl}_X(F) = \emptyset$ y por la normalidad de X se sigue que C y F están completamente separados en X. □

Corolario 4.4 (Gryzlov)**.** *Sea X un espacio compacto de estrechez numerable tal que $d(X) \leq 2^{\aleph_0}$. Entonces hay un subespacio Y de X que es numerablemente compacto y normal tal que $|Y| \leq 2^{\aleph_0}$ y $\beta(Y) = X$.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso de X tal que $|D| \leq 2^{\aleph_0}$. Considere un submodelo elemental $\mathfrak{M}$ como en el teorema 4.3 tal que $D \subseteq \mathfrak{M}$ y sea $Y = X \cap \mathfrak{M}$. Claramente $|Y| \leq 2^{\aleph_0}$ y Y es numerablemente compacto por la Proposición 2.1. Además, Y es denso y C^*-encajado en X , así Y es normal y $\beta(Y) = X$. □

5. Usando $\diamondsuit$

En esta última sección emplearemos submodelos elementales y el principio combinatorio $\diamondsuit$ de Jensen para establecer la existencia de líneas de Souslin. Empezaremos por explicar qué significa todo esto.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor demostró que cualesquiera dos conjuntos numerables, linealmente ordenados, no acotados y densos en sí mismos son isomorfos [7, Theorem 11]; es también muy conocido el hecho de que dado un conjunto linealmente ordenado y denso en sí mismo hay un único (salvo isomorfismo) conjunto linealmente ordenado que es completo y que contiene al conjunto dado como subconjunto denso. De estos dos resultados se deduce que $\mathbb{R}$ es el único espacio linealmente ordenado que es denso en sí mismo, no acotado, completo y separable. En 1920 Souslin preguntó si la condición de ser separable podía ser sustituida por la de satisfacer la condición de la cadena contable (c.c.c.). Un espacio topológico (X, τ) se dice que satisface la *condición de la cadena contable* si cualquier familia ajena por pares y de conjuntos abiertos no vacíos es a lo más numerable. Claramente cada espacio separable satisface la c.c.c. Entonces el problema de Souslin puede formularse como: Sea X un espacio linealmente ordenado tal que X es denso en sí mismo, no acotado, completo y satisface la c.c.c. ¿Es X isomorfo a $\mathbb{R}$? Un contraejemplo debería ser un espacio linealmente ordenado denso en sí mismo, completo, que satisfaga la c.c.c. pero que no sea separable. Este tipo de espacios son las llamadas *líneas de Souslin*. Se ha establecido que no es posible decidir el problema de Souslin únicamente con los axiomas de ZFC. El Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo, $\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$, implica que no existen tales objetos y como veremos a continuación, asumiendo $\diamondsuit$ podremos construir una línea de Souslin. Aunque el problema de Souslin es considerablemente viejo aún está muy vivo y en nuestros días es una fuente de diversas investigaciones.

$\diamondsuit$ es la afirmación: Existen sucesiones de conjuntos $\{S_\alpha \subseteq \alpha : \alpha \in \omega_1\}$ tal que para cada $S \subseteq \omega_1$, el conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : S \cap \alpha = S_\alpha\}$ es estacionario en ω_1.

Nos gustaría exponer una demostración de que $\diamondsuit$ es consistente con ZFC y así dar una muestra más del empleo de los submodelos elementales. Sin embargo, se necesitan de muchos otros conceptos que no tenemos intención de introducir ahora. Simplemente indicamos que $\diamondsuit$ es una consecuencia del Axioma de Constructividad de Gödel, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, y que la demostración de eso saca mucho provecho de los submodelos elementales. Lo que sí no es difícil de convencerse es que la Hipótesis de Continuo CH es una consecuencia de $\diamondsuit$: Si $X \subseteq \omega$, entonces $X = S_\alpha$ para algún $\alpha \in \omega_1$; por consiguiente $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Las líneas de Souslin son objetos de mucha utilidad en topología general; sólo por poner la más sencilla de sus implicaciones, teniendo una línea de Souslin se tiene un ejemplo de un espacio que satisface la c.c.c. pero que X^2 no la satisface.

Teorema 5.1. *$\diamondsuit$ implica la existencia de líneas de Souslin.*

Demostración. Vamos a construir un orden lineal $\trianglelefteq$ en ω_1 de tal manera que $X = (\omega_1, \trianglelefteq)$ será una línea de Souslin. Inductivamente vamos a definir $\trianglelefteq_\alpha$ sobre α para cada $\alpha \in \omega_1$, de modo que:

(a) $\trianglelefteq_\alpha$ es un orden lineal sobre α, para cada $\alpha \in \omega_1$,
(b) $\trianglelefteq_\alpha \subseteq \trianglelefteq_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \omega_1$,
(c) $(\alpha, \trianglelefteq_\alpha)$ es denso en sí mismo para ordinales límites $\alpha \in \omega_1$,
(d) $\mathcal{U}_\alpha$ es una *familia celular* maximal (o sea, una familia de intervalos abiertos, no vacíos y ajenos por pares que es $\subseteq$-maximal respecto a esa propiedad) en $(\alpha, \trianglelefteq_\alpha)$, para todo $\alpha \in \omega_1$; y $\mathcal{U}_\alpha$ permanecerá maximal a través del resto de la construcción,
(e) Si α es un ordinal sucesor par y $\langle B_\alpha, C_\alpha \rangle$ forman una cortadura de Dedekind en $(\beta, \trianglelefteq_\beta)$ sin puntos finales, donde β es el máximo ordinal límite menor que α; entonces α llenará esa cortadura en $(\alpha + 1, \trianglelefteq_{\alpha+1})$,
(f) Si $A_\alpha \in [\alpha]^\omega$, entonces A_α no será denso en $(\alpha + \omega, \trianglelefteq_{\alpha+\omega})$.

Antes de empezar nuestra construcción, fijemos algunos conjuntos. Primeramente tomemos biyecciones cualesquiera $f : \omega_1 \times \omega_1 \to \omega_1$ y

$$g : \{2n + 1 : n \in \omega\} \cup \{0\} \to \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

requiriendo únicamente que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. Sea $\{A_\alpha : \alpha \text{ es límite y } A_\alpha \subseteq \alpha\}$ una enumeración de $[\omega_1]^\omega$ y enumeremos $[\omega_1]^\omega \times [\omega_1]^\omega$ como

$$\{\langle B_\alpha, C_\alpha\rangle : \alpha \text{ es ordinal sucesor par y } B_\alpha \cup C_\alpha \subseteq \alpha\} .$$

Finalmente fijemos también una sucesión $\diamondsuit$: $\langle S_\alpha : \alpha \in \omega_1\rangle$. Usaremos esta sucesión para capturar o adivinar todas las posibles familias celulares en nuestra línea de Souslin.

Empezamos nuestra inducción a partir de ω ordenado isomórficamente a $\mathbb{Q}$. Ahora supongamos que hemos construido $\trianglelefteq_\beta$ para todo $\beta \leq \alpha$ y que α es un ordinal límite. El plan es encontrar un lugar idóneo para insertar α y $\alpha+1$ como el supremo e ínfimo, respectivamente, de una cortadura de Dedekind apropiada y usar g para insertar todos los otros ordinales impares entre α y $\alpha+1$ como una copia de $\mathbb{Q}$ en $(0,1)$; como veremos después con más detalle, esto prevendrá que A_α sea denso. Usaremos los ordinales pares $\alpha + 2n$ para tapar posibles huecos que hayamos dejado en $(\alpha, \trianglelefteq_\alpha)$. También tenemos que definir familias celulares maximales y mantener su carácter maximal por el resto de nuestra inducción.

Así, sea α un ordinal límite para el que ya tenemos definido $\trianglelefteq_\alpha$. Primero examinamos si $f^{-1}(S_\alpha)$ nos determina un familia celular —con esto queremos decir que para cada $\xi \in S_\alpha$ se tiene que $f^{-1}(\xi) = \left\langle \delta_\xi, \delta'_\xi \right\rangle$ con $\delta_\xi \trianglelefteq_\alpha \delta'_\xi$ y la familia de intervalos

$$\left\{ \left(\delta_\xi, \delta'_\xi\right) : \xi \in S_\alpha \right\}$$

es celular. Si $f^{-1}(S_\alpha)$ es en efecto una familia celular, entonces denotamos a dicha familia por $\mathcal{U}_\alpha$ si además es maximal; si no es maximal entonces la extendemos para tener una familia maximal a la que también llamamos $\mathcal{U}_\alpha$. Si por el contrario $f^{-1}(S_\alpha)$ no es una familia maximal, entonces buscamos una y la llamamos $\mathcal{U}_\alpha$. Ahora asumamos que $A_\alpha = \{d_n : n \in \omega\}$ y enumeremos α como $\{\beta_n : n \in \omega\}$. Sea (a, b) cualquier intervalo en $(\alpha, \trianglelefteq_a)$; como $\mathcal{U}_\alpha$ es maximal, debe existir $(u, v) \in \mathcal{U}_\alpha$ tal que $(a, b) \cap (u, v) \neq \emptyset$. Entonces usando la densidad de $(\alpha, \trianglelefteq_\alpha)$ en sí mismo, podemos elegir un intervalo $[x_0, y_0]$ tal que: $d_0 \notin [x_0, y_0]$, $\beta_0 \notin [x_0, y_0]$ y $[x_0, y_0] \subseteq (a, b) \cap (u, v)$. Inductivamente elijamos intervalos $[x_n, y_n]$ tales que: $d_n \notin [x_n, y_n]$, $\beta_n \notin [x_n, y_n]$ y $[x_n, y_n]$ esté contenido en la intersección de (x_{n-1}, y_{n-1}) y un miembro de $\mathcal{U}_{\beta_n}$. Sea

$$\mathcal{B}_\alpha = \{[x_n, y_n] : n \in \omega\} .$$

Observemos que de la densidad de $(\alpha, \trianglelefteq_\alpha)$ se sigue que $\mathcal{B}_\alpha$ tiene, para cada $\beta < \alpha$, un intervalo contenido en algún miembro de $\mathcal{U}_\beta$. Como $\bigcap \mathcal{B}_\alpha = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{B}_\alpha$ nos determina una cortadura; esto último no es en realidad muy importante puesto que podemos definir α como el supremo de los extremos izquierdos de cada intervalo en $\mathcal{B}_\alpha$ y $\alpha+1$ como el ínfimo de los extremos derechos de los intervalos en $\mathcal{B}_\alpha$. Así hemos determinado los ordenes $\trianglelefteq_\alpha$ y $\trianglelefteq_{\alpha+1}$; como $\mathcal{U}_\alpha$ podemos tomar $\{(-\infty, \alpha), (\alpha, +\infty)\}$ y similarmente $\mathcal{U}_{\alpha+1}$. No creemos que esté por demás observar que siempre hay cortaduras "sin llenar" dado que $(\alpha, \trianglelefteq_\alpha)$ es isomorfo a $\mathbb{Q}$ por el Teorema de Cantor antes comentado en esta misma sección. Lo importante aquí es elegir el lugar idóneo para preservar la maximalidad de las familias celulares ya definidas; lo cual se debe a que, a pesar de que se van a introducir nuevos intervalos entre α y $\alpha+1$, cada uno de ellos se encuentra contenido en un miembro de las familias celulares definidas hasta la α-ésima etapa de la construcción.

Para las siguientes etapas de nuestra inducción, los ordinales impares $\alpha+(2n+1)$ con $n>0$ se introducen según la función g de modo que se vayan preservando los ordenes y que para la etapa $\alpha+\omega$ se tenga una copia de $\mathbb{Q}\cap(0,1)$ entre α y $\alpha+1$. Para los ordinales pares $\alpha+2n$ examinamos si $\langle B_{\alpha+2n}, C_{\alpha+2n}\rangle$ determina una cortadura en $(\alpha, \trianglelefteq_\alpha)$ sin puntos finales; si es así entonces hacemos $\alpha+2n=\sup B_\alpha$ y $\alpha+2n=\inf C_\alpha$ en $(\gamma, \trianglelefteq_\gamma)$, donde $\gamma=\alpha+(2n+1)$. Para todos los ordinales sucesores $\alpha+k$, $\mathcal{U}_{\alpha+k}$ es definida de manera trivial.

Nos resta indicar la definición de $\trianglelefteq_\alpha$ para ordinales límite $\alpha\in\omega_1$; simplemente hacemos $\trianglelefteq_\alpha=\bigcup\{\trianglelefteq_\beta\colon \beta<\alpha\}$ si $\trianglelefteq_\beta$ ha sido definido para $\beta<\alpha$ satisfaciendo de (1) a (6). $\mathcal{U}_\alpha$ es cualquier familia celular maximal. Esto completa nuestra construcción.

Para finalizar nuestra demostración necesitamos establecer que $(\omega_1, \trianglelefteq)$ es una línea de Souslin; siendo evidentemente $\trianglelefteq=\bigcup\{\trianglelefteq_\alpha\colon \alpha\in\omega_1\}$. En primer término, es claro que $(\omega_1,\trianglelefteq)$ es linealmente ordenado y denso en sí mismo. Supongamos que $\langle B, C\rangle$ es una cortadura sin puntos finales y consideremos un submodelo elemental numerable $\mathfrak{M}$ que contenga $\langle B, C\rangle$ como uno de sus elementos. Usando la elementaridad no es difícil convencerse de que $\mathfrak{M}\cap B$ es cofinal en B y $\mathfrak{M}\cap C$ es coinicial en C; por lo tanto, si $\mathfrak{M}\cap B$ tiene supremo éste será el supremo de B; similarmente para $\mathfrak{M}\cap C$ y C cambiando supremo por ínfimo. Existe un ordinal $\alpha\in\omega_1$ tal que $\langle\mathfrak{M}\cap B, \mathfrak{M}\cap C\rangle=\langle B_\alpha, C_\alpha\rangle$ y por (f) sabemos que $\mathfrak{M}\cap B$ tiene supremo y $\mathfrak{M}\cap C$ tiene ínfimo en $(\alpha+1, \trianglelefteq_{\alpha+1})$; más aún, que tienen al mismo punto por supremo e ínfimo, respectivamente. Esto contradice el supuesto de que B y C no tenían extremo superior e inferior, respectivamente. Si $A\in[\omega_1]^\omega$ entonces $A=A_\alpha$ para algún $\alpha\in\omega_1$ y por (f) A no es denso en $(\alpha+\omega, \trianglelefteq_{\alpha+\omega})$ y, por tanto, no lo es en $(\omega_1,\trianglelefteq)$.

Por último, sea $\mathcal{U}$ una familia celular. Debemos demostrar que $\mathcal{U}$ es a lo más numerable. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\mathcal{U}$ es maximal. Sea S el conjunto de todos los puntos que son extremos de algún intervalo en $\mathcal{U}$. Consideremos además un submodelo elemental numerable $\mathfrak{M}$ tal que $\mathcal{U}\in\mathfrak{M}$ y

$$\mathfrak{M}\cap\omega_1\in\{\alpha\in\omega_1 : S\cap\alpha=S_\alpha\}.$$

Pongamos $\delta=\mathfrak{M}\cap\omega_1$. Entonces $f^{-1}(S_\delta)$ determina una familia celular maximal $\mathcal{U}_\delta$; en efecto, si $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ es la familia celular que determina $f^{-1}(S_\delta)$ y $\xi,\xi'<\delta$ son tales que $(\xi,\xi')\cap I=\emptyset$ para todo $I\in\mathcal{V}$, entonces $(\xi,\xi')\in\mathcal{U}$ ya que de lo contrario debería existir $I\in\mathcal{U}$ tal que $(\xi,\xi')\cap I\neq\emptyset$ y por elementaridad existiría $I\in\mathcal{U}\cap\mathfrak{M}$ con la misma propiedad; pero $\mathcal{U}\cap\mathfrak{M}$ no es más que $\mathcal{V}$. Así, no existe tal $I\in\mathcal{U}$ y consiguientemente $(\xi,\xi')\in\mathcal{U}$. Tenemos entonces que $\xi,\xi'\in S$ y como $\xi,\xi'<\delta$ obtenemos que $\xi,\xi'\in S_\delta$.

Así $(\xi, \xi') \in \mathcal{V}$; o sea, $\mathcal{V} = \mathcal{U}_\delta$. Siendo $\mathcal{U}_\delta$ maximal, necesariamente $\mathcal{U}_\delta = \mathcal{U}$. Esto establece que $\mathcal{U}$ es numerable como queríamos ver. □

Históricamente no fue así como se demostró la existencia de las líneas de Souslin a partir de $\diamondsuit$. Jensen demostró que $\diamondsuit$ implica la existencia de árboles de Souslin. Nosotros hemos procedido a la inversa; pero realmente estamos desarrollando el mismo proceso usado para la construcción de un *árbol de Souslin*. Un árbol $(T, \preccurlyeq)$ se llama de Souslin si T tiene altura ω_1 y cualquier cadena o anticadena en T es a lo más numerable. Los árboles de Souslin fueron introducidos por Kurepa (en 1936) quien demostró que hay un árbol de Souslin si y sólo si hay una línea de Souslin. Si nos fijamos en la familia $\mathcal{I}$ de intervalos cerrados no degenerados de nuestra línea de Souslin y la ordenamos mediante $\supseteq$, es posible elegir $T \subseteq \mathcal{I}$ tal que $(T, \supseteq)$ es un árbol de Souslin. La construcción es por inducción sobre $\alpha \in \omega_1$. Primero tomamos $I = [a_0, b_0]$ arbitrariamente (tal que $a_0 \trianglelefteq b_0$). Habiendo construido I_β, $\beta < \alpha$ consideramos el conjunto numerable $C = \{a_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}$ de puntos extremos de los intervalos I_β hasta ahora construidos. Como X es una línea de Souslin, C no es denso en X y así existe un intervalo $[a, b]$ ajeno a C; elegimos uno de tales intervalos $[a_\alpha, b_\alpha] = I_\alpha$. El conjunto $T = \{I_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es no numerable y parcialmente ordenado por $\supseteq$. Si $\alpha < \beta$, entonces o bien $I_\alpha \supseteq I_\beta$ o $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$. Se sigue que para cada α, $\{I \in T : I \supseteq I_\alpha\}$ está bien ordenado por $\supseteq$ y así T es un árbol.

Veamos que T satisface las otras propiedades para ser árbol de Souslin. Si I y J son incomparables en T, entonces $I \cap J = \emptyset$ y por lo tanto cualquier anticadena en T es a lo más numerable dado que X satisface la c.c.c. Ahora note que si b es una cadena en T de cardinalidad $\aleph_1$, entonces los extremos izquierdos de los intervalos en b forman una sucesión creciente $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de puntos de X. Es claro que los intervalos $(x_\alpha, x_{\alpha+1})$, $\alpha < \omega_1$, forman una familia celular de cardinalidad $\aleph_1$, contradiciendo la hipótesis de que X satisface la c.c.c.

Finalmente, es inmediato que la altura de T es a lo más ω_1 y ya que cualquier nivel es una anticadena y T es no numerable, tenemos que la altura de T debe ser exáctamente ω_1.

Es valioso mencionar que si la definición de árboles de Souslin es ligeramente debilitada, entonces árboles con las propiedades más débiles existen. Un *árbol de Aronszajn* es uno que tiene altura ω_1, todos sus niveles son numerables y el cual no tiene cadenas no numerables.

Teorema 5.2. *Existe un árbol de Aronszajn.*

Si uno trata de generalizar el resultado anterior para árboles de mayor altura se encuentra uno con muchas dificultades además de muchas cuestiones muy interesantes. Por generalizaciones a árboles de mayor altura queremos decir resultados del tipo: "Hay un árbol que es κ-Aronszajn"; para $\kappa > \aleph_1$ dado. Un árbol T es *κ-Aronszajn* si es un árbol de altura κ tal que cada nivel de T tiene cardinalidad menor que κ y cada cadena en T también tiene cardinalidad menor que κ. Solamente haremos pocos comentarios sobre esto. Primeramente, la Hipótesis Generalizada del Continuo, GCH, implica que hay un árbol que es κ-Aronszajn para todo cardinal regular $\kappa \geq \aleph_1$ excepto posiblemente cuando κ es inaccesible o el sucesor de un cardinal singular. Para κ fuertemente inaccesible, sin asumir GCH, hay un árbol que es κ-Aronszajn salvo que κ sea débilmente compacto.

Sin GCH, ni siquiera debe haber un árbol que sea ω_2-Aronszajn. Sin embargo, si no hay un árbol que sea ω_2-Aronszajn, entonces $\aleph_2$ es débilmente compacto en $\mathbf{L}$, la clase de conjuntos construibles de Gödel; y esto es realmente sorprendente. Recordemos que un cardinal débilmente compacto es en particular un cardinal de Mahlo; es decir, un cardinal en el cual el conjunto de cardinales regulares es estacionario. Puesto que el conjunto de cardinales sucesores no es estacionario en cualquier ordinal, se sigue que el conjunto de cardinales inaccesibles es estacionario en un *cardinal de Mahlo*. Esto da una idea de lo monstruosamente grande que debe ser un cardinal débilmente compacto. Son muchas las consecuencias de suposiciones como "existen cardinales débilmente compactos" que pueden ser obtenidas en la topología general.

Agradecimientos

El autor de esta nota desea agradecer al Profesor Alan Dow quien le mostró el empleo de la técnica y sugirió buena parte del material aquí contenido. También desea agradecer a Carlos A. Martínez Ranero por sus útiles sugerencias. Es conveniente aclarar que el material expuesto fue originalmente preparado para el minicurso que el autor fue invitado a dar durante las Terceras Jornadas Veraniegas de Topología en la Facultad de Ciencias de la BUAP en Agosto del 2000. Así que es también debido expresar gratitud al comité organizador de aquel evento.

Referencias

[1] Zoltán T. Balogh, On compact Hausdorff spaces of countable tightness. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 105(3):755–764, 1989.

[2] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model theory*, volume 73 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990.

[3] Alan Dow, An introduction to applications of elementary submodels to topology. *Topology Proc.*, 13(1):17–72, 1988.

[4] Alan Dow, More set-theory for topologists. *Topology Appl.*, 64(3):243–300, 1995.

[5] Ryszard Engelking, *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from Polish by the author.

[6] R. Hodel, Cardinal functions. I. In *Handbook of set-theoretic topology*, pages 1–61. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[7] Thomas Jech, *Set theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997.

[8] Kenneth Kunen, *Set theory*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. An introduction to independence proofs, Reprint of the 1980 original.

[9] Mary Ellen Rudin, Two problems of Dowker. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 91(1):155–158, 1984.

[10] Stevo Todorčević, Forcing positive partition relations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280(2):703–720, 1983.

[11] Stephen Watson, The Lindelöf number of a power; an introduction to the use of elementary submodels in general topology. *Topology Appl.*, 58(1):25–34, 1994.

Instituto de Matemáticas, UNAM -Morelia., Apartado Postal 61-3 (Xangari), Morelia Michoacán, México 58089

E-mail address: `fernando@matmor.unam.mx`