Introducción a la teoría de la medida

Fernando Hernández Hernández
Manuel Ibarra Contreras

aportacionesmatemáticas
textos

Introducción a la teoría de la medida • Fernando Hernández Hernández Manuel Ibarra Contreras

am
42

Aportaciones matemáticas
Textos 42, nivel medio

ISBN 978-607-30-0322-3
9 786073 003223

Instituto de Matemáticas UNAM

Introducción a la teoría de la medida

aportaciones**matemáticas**

Libro-medida-2018-08-07.pdf 3 8/7/18 8:22 PM

Aportaciones Matemáticas
Textos

Introducción a la teoría de la medida

Fernando Hernández Hernández
Manuel Ibarra Contreras

aportacionesmatemáticas

Instituto de Matemáticas UNAM

Ciudad de México, 2018

Catalogación en la publicación UNAM. Dirección General de Bibliotecas
Nombres: Hernández Hernández, Fernando, autor. | Ibarra Contreras, Manuel, autor
Título: Introducción a la teoría de la medida / Fernando Hernández Hernández, Manuel Ibarra Contreras.
Descripción: 1a. edición. | Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, 2018. | Serie: Aportaciones matemáticas. Textos; 42.
Identificadores: LIBRUNAM 2004376 | ISBN 9786073003223
Temas: Teoría de la medida – Libros de texto. | Teoremas de Lebesgue-Radon-Nikodym.
Clasificación: LCC QA312.H47 2018 | DDC 515.42—dc23

Autores:

Fernando Hernández Hernández
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
Avenida Francisco J. Múgica s/n, Ciudad Universitaria,
58030, Morelia, Michoacán.

Manuel Ibarra Contreras
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Edificio FM1-101, Ciudad Universitaria,
72570, Puebla, Puebla.

1a. Edición, 2018
Colección *Aportaciones matemáticas*, Serie *Textos*, Núm. 42
Fecha de edición: abril de 2018

ISBN: 978-607-02-8771-8 (Colección Aportaciones matemáticas)
ISBN: 978-607-30-0322-3 (Introducción a la teoría de la medida)

Edición:

Instituto de Matemáticas, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, Ciudad de México

Aportaciones matemáticas es una publicación del Instituto de Matemáticas.
Su serie **Textos** comprende libros de texto de matemáticas y sus aplicaciones, para la licenciatura y el posgrado en matemáticas y en otras disciplinas. Se divide en tres niveles:

- Nivel elemental, dirigido a estudiantes de los primeros dos años de la licenciatura.
- Nivel medio, dirigido a estudiantes de los dos últimos años de la licenciatura.
- Nivel avanzado, dirigido a estudiantes de posgrado.

Introducción a la teoría de la medida, de Fernando Hernández y Manuel Ibarra es un texto de nivel medio.

Hay excelentes libros de medida escritos por verdaderos especialistas en la materia y uno debería preguntar por qué uno más que seguramente no es del nivel de esos otros. Este libro, entre otras cosas, recoge la experiencia de ambos autores al guiar estudiantes tanto de licenciatura (pre-grado) como de posgrado a diversas áreas. El libro provee material suficiente tanto para un curso de pre-grado de buen nivel así como para un curso introductorio para nivel maestría. Por lo tanto, el libro tiene un nivel entre medio alto y avanzado básico. Se hace hincapié a algunos aspectos que no se encuentran en libros clásicos.

Para un curso de pre-grado, lo deseable es cubrir la mayor parte de los seis primeros capítulos; para un curso de posgrado los ocho primeros capítulos. El capítulo octavo contiene temas independientes; el instructor podrá elegir según los intereses de sus estudiantes qué secciones abordar en el curso. En el noveno capítulo se necesita un poco más de experiencia topológica.

Dado que es fundamental que el estudiante compruebe su nivel de asimilación del material presentado, cada capítulo se acompaña de ejercicios de diversa dificultad. Parte del entrenamiento que se debe adquirir consiste en saber reconocer por uno mismo qué problemas será capaz de resolver y cuáles debe resolver con ayuda. También es importante aprender a pedir ayuda y con ella ser capaz de realizar las tareas antes no completadas.

A quienes nos han dejado o nos están
dejando un maravilloso legado…

Índice general

Prefacio

Hay muchos muy buenos libros de medida escritos por diversos autores verdaderos especialistas en la materia y uno debería preguntar por qué uno más que seguramente no es del nivel de esos otros.

Creemos que una primera respuesta debería ser por pasión, por ganas de decir aunque sea otra vez lo mismo. Es una respuesta muy egoísta. Otra respuesta, no tan egoísta aunque no deja de serlo, es porque creemos que los libros hasta ahora en el mercado no tienen el enfoque que nosotros queremos y porque pretendemos tener un compendio de las cosas útiles para quienes estudian análisis, teoría descriptiva de conjuntos o disciplinas similares.

El texto está principalmente basado en notas de clase de cursos sobre la materia ofrecidos en diferentes semestres en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Se agradece en especial a Ricardo E. Chávez Cáliz y a René Rodríguez Aldama por acceder a que se fotocopiaran sus apuntes de clase de donde nació este texto. Se hace también una muy agradecida mención a René y César Ismael Corral Rojas quienes revisaron primeras versiones del libro que el lector tiene en sus manos. Esos apuntes estuvieron basados en el libro de Terence Tao [T]. Al escribir el texto se ha incluido material de otras fuentes que aparecen en la bibliografía; por ejemplo, el libro de Kechris [Ke]. Ninguno de los resultados que aparecen a la largo de la obra son propios, todos fueron elegidos de uno u otro lado.

El texto está pensado para un primer curso sobre Teoría de la Medida. Los tres capítulos finales están pensados como material extra. Por ejemplo, del octavo capítulo se pueden cubrir algunas de las secciones durante el curso ya que ellas son independientes una de la otra. En el noveno capítulo se necesita un poco más de experiencia topológica. Aunque es posible hacer todo el desarrollo para funciones de varias variables o funciones con valores complejos, se prefirió concentrarse en funciones con valores reales ya que el desarrollo para otras funciones es una modificación de los conceptos que se definieron para funciones con valores reales; por ejemplo, para definir la integral de una función f con valores complejos, se observa que en realidad $f = f_0 + i f_1$ para dos funciones f_0 y f_1 con valores reales; entonces la definición de la integral de f queda en términos naturales de las integrales de f_0 y f_1.

Por supuesto que por influencia de los gustos personales, se piensa que es preferible tomar el curso después de haber llevado uno de topología y otro de teoría de conjuntos; pero claramente puede hacerse sin haber tomado alguno de estos últimos. Para los lectores a quienes les es extraño hablar de espacios métricos y/o topológicos, se puede siempre pensar simplemente en los $\mathbb{R}^k$ o incluso en $\mathbb{R}$ mismo y aún tener mucha generalidad.

Cada capítulo se acompaña de una serie de ejercicios. Es fundamental que el estudiante compruebe su nivel de asimilación del material presentado realizando la mayoría de los ejercicios. Los hay de diversa dificultad. Parte del entrenamiento que uno debe adquirir consiste en saber reconocer por uno mismo qué problemas será capaz de resolver y cuáles debe resolver con ayuda. Otra parte es aprender a pedir ayuda y con ella ser capaz de realizar las tareas antes no cumplidas.

Agradecemos a Overleaf; eso hizo posible la escritura de este libro a cuatro manos, desde la distancia. Asimismo a la BUAP y la UMSNH, la Coordinación de la Investigación Científica de la UMSNH, la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP y el CONACyT a través del proyecto 169078-F. A Leonardo Espinosa por afinar los últimos detalles de la edición de este libro.

Fernando Hernández Hernández
Manuel Ibarra Contreras

Noviembre 2017

1
Introducción

1.1. Historia

Casi cualquier persona con conocimientos rudimentarios en matemáticas ha escuchado que existe una importante área de estudio conocida como el Cálculo Diferencial e Integral. El cómputo de integrales es una de las tareas fundamentales del cálculo. En ocasiones se asocia de manera un tanto ingenua a la integral de una función con el área bajo la curva que produce la gráfica de la función, digamos para funciones de los reales, $\mathbb{R}$, en los reales. Esa interpretación intuitiva funciona bien para una clase amplia de funciones entre las que podemos contar a los polinomios y otras funciones elementales como las trigonométricas. Sin embargo, si se es más cauteloso, se pueden hallar funciones con definiciones relativamente sencillas para las cuales "el área bajo la curva" no tiene tanto sentido. Esa pérdida de sentido parece proceder de dos fuentes hermanas, una es que hay funciones caprichosas que hacen que nuestra idea de estar "bajo la curva" se vea obligada a pensarse con más cuidado; la otra, que aunque sea claro qué es estar "bajo la curva" no sea claro por qué podemos asociar una medida a esa región. Análizar los fenómenos anteriores es de mucha importancia tanto teórica como práctica y es lo que origina la teoría de la medida y la teoría de integración de Lebesgue.

En el siglo XIX los matemáticos de la época también se esforzaron por dar una fundamentación rigurosa para el cálculo integral. Fue Bernhard Riemann (1826-1866) quien presentó una definición adecuada de la integral. La idea de Riemann es iniciar con la construcción de una sucesión de áreas fácilmente calculables y que converge a la integral de una función dada. Su idea fue muy exitosa porque daba la respuesta esperada para muchos problemas ya resueltos y daba útiles resultados para muchos otros problemas.

Sin embargo, la integración de Riemann no interactúa bien con el proceso de tomar límites de sucesiones de funciones y de hecho es difícil de analizar el paso al límite con integrales de Riemann. Desde el punto de vista de aplicaciones, es muy importante tener un muy buen comportamiento en el paso al límite para la aproximación sucesiva. La integral de Lebesgue es mucho mejor para analizar en qué casos se puede pasar de la integral de una función al cálculo del límite de las integrales de las aproximaciones sucesivas a la función dada. Dos importantes teoremas al respecto son el Teorema de la Convergencia Monótona y el Teorema de la Convergencia Dominada.

Obviamente hay ideas y motivaciones comunes en las integrales de Riemann y en la integral de Lebesgue; algo que las hace muy diferentes es que mientras la integral de Riemann se basa en particiones del dominio de la función para hacer el cómputo de la integral, la integral de Lebesgue puede manejar a una clase más ámplia de funciones porque su cómputo está basado en particiones del rango de la función y no en particiones del dominio de ella. Un ejemplo clásico es la función de Dirichlet; es decir, la función característica de los números racionales, o sea, que vale 1 en un número racional y 0 en un número irracional. Esta función tiene integral de Lebesgue pero no tiene integral de Riemann. Más aún, la integral de Lebesgue de la función de Dirichlet en el intervalo $[0,1]$ es cero, lo cual coincide con la intuición de que al escoger uniformemente al azar un número real del intervalo $[0,1]$, la probabilidad de escoger un número racional debe ser cero.

Las nociones de longitud, área y volumen están realmente ligadas desde la época dorada de la matemática griega a la invariabilidad bajo desplazamientos rígidos; así, usando esa invariabilidad e ingeniosas subdivisiones finitas o bien el método exhaustivo, los griegos fueron capaces de obtener las áreas o los volúmenes de las figuras clásicas (polígonos, cónicas, poliedros, esferas, etc.). En el lenguaje moderno puede decirse que lo que hicieron los geómetras griegos fue demostrar la existencia de "funciones de conjunto" aditivas e invariantes por traslaciones, pero definidas solamente para conjuntos de un tipo muy especial. Puede entonces considerarse que el cálculo integral responde a la necesidad de ampliar el dominio de definición de estas funciones de conjunto. Cuando la memoria de Riemann fue publicada en 1867 (después de su muerte) la época ya era más favorable para ese tipo de investigaciones, la integral de Riemann ocupó su lugar de manera natural en la corriente de ideas que conllevaba entonces el estudio del continuo y de las funciones de variable real. Matemáticos como Weierstrass, du Bois-Reymond, Hankel, Dini, entre otros, hicieron importantes contribuciones para culminar con Cantor y el surgimiento de la teoría de conjuntos. La forma dada por Riemann a la condición de integrabilidad sugería la idea de la “medida” del conjunto de puntos de discontinuidad de una función en un intervalo, pero todavía debían transcurrir treinta años antes de que se llegase a dar una definición de medida fecunda y cómoda.

Los primeros intentos en esa dirección se deben a Stolz, Harnack y Cantor; para definir la medida de un subconjunto acotado E de $\mathbb{R}$, los dos primeros consideraban conjuntos $F \supseteq E$ que eran uniones finitas de intervalos, tomaban para cada F la suma de las longitudes de los intervalos correspondientes y llamaban *medida* de E al ínfimo de esos números. Mientras que Cantor, situándose ya desde el principio en $\mathbb{R}^n$, consideraba para un conjunto acotado E y para $\varrho > 0$, la burbuja $B(E;\varrho)$ de E formada por los puntos cuya distancia a E es a lo más ϱ y tomaba el ínfimo de los volúmenes de las burbujas $B(E,\varrho)$.[1] Con esta definición resulta que la *medida* de un conjunto es igual al de su clausura o adherencia, de donde se deduce que la medida de la unión de dos conjuntos ajenos puede ser estrictamente menor a la suma de las medidas de estos dos conjuntos. Algunos años después Peano y Jordan introducen al lado de la medida de Cantor una *medida interior* y llaman medibles a los conjuntos en los que esos dos números coinciden (ver Definición 2.6). Con esa definición de medida, la medida de una unión de conjuntos medibles y ajenos tiene la medida esperada; sin embargo, un conjunto abierto y acotado no necesariamente es medible ni tampoco lo es el conjunto de números racionales contenido en el intervalo.

A Émile Borel (1871-1956) corresponde el mérito de haber sabido discernir los defectos de las definiciones anteriores y de haber visto la forma de remediarlos. Se sabía desde Cantor que un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ es la unión numerable y ajena de sus componentes conexas, o sea intervalos abiertos; apoyado en este resultado Borel, en lugar de intentar aproximar por fuera a un conjunto abierto con una unión finita de intervalos, propone tomar como su medida a la suma de las longitudes de cada una de sus componentes. Junto con los trabajos contemporáneos de Baire esto era el punto de partida de toda una serie de trabajos de naturaleza topológica acerca de la clasificación de los conjuntos de puntos y serviría de base para la extensión de la noción de integral dada por Lebesgue en los primeros años del siglo XX.

Uno de los problemas a los que Lebesgue dedicó más esfuerzos fue la relación entre integral y primitiva. La motivación es clara. Con la generalización de la integral de Riemann es natural preguntarse si la correspondencia clásica entre integral y primitiva seguía siendo válida para funciones continuas y, si era válida, hasta qué punto lo era. Es fácil dar ejemplos de funciones Riemann integrables f tales que $\int_a^x f(t)\,dt$ no tenga derivada en ciertos puntos. Volterra había mostrado en 1881 que aunque la derivada de una función F sea acotada en un intervalo puede no ser integrable (en el sentido de Riemann). Mediante un análisis extraordinariamente sutil, Lebesgue consiguió

[1] Que definía de manera un tanto similar a lo que se hace en la Definición 2.6.

demostrar que si f es integrable en su sentido en $[a,b]$, entonces $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ tiene en casi todo punto, derivada igual a $f(x)$. Recíprocamente, si una función g es derivable en $[a,b]$ y su derivada $g'=f$ es acotada, entonces f es integrable y se tiene la fórmula $g(x)-g(a)=\int_a^x f(t)\,dt$.

En 1910 Lebesgue aborda la extensión a las integrales múltiples de sus resultados acerca de las derivadas de las integrales simples. De ese modo, asocia a una función f integrable sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, la función de conjunto $F(E)=\int_E f(x)\,dx$ definida para subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, que generaliza el concepto de integral indefinida y señala que esta función es completamente aditiva y absolutamente continua (en el sentido de que $F(E)$ tiende a cero si la medida de E tiende a cero). Hace notar la posibilidad de generalizar la noción de función de variación acotada, considerando las funciones $F(E)$ para conjuntos medibles y tales que $\sum_{n\in\mathbb{N}}|F(E_n)|$ permanezca acotada para toda partición numerable de E en partes medibles. Y, si bien se limita a considerar solamente funciones de esta clase en el conjunto de los bloques de $\mathbb{R}^n$, está bien claro que solamente había que dar un paso para llegar a la noción general de medida que va a definir J. Radon en 1913 englobando en una misma síntesis la integral de Lebesgue y la integral de Stieltjes. Casi inmediatamente después de la aparición de la publicación de Radon, Fréchet señalaba que casi todos los resultados podían extenderse al caso en que la función de conjunto fuera completamente aditiva y estuviera definida en subconjuntos medibles de un conjunto cualquiera X. Por supuesto, los subconjuntos medibles deberían ser tales que las operaciones de unión numerable y diferencias dieran como resultado conjuntos para los que sí está definida la función.

Con las aportaciones de Radon y Fréchet la teoría general de integración podía considerarse como terminada a grandes rasgos. Entre los avances esenciales posteriores se pueden nombrar la definición de producto infinito de medidas hecha por Daniell y la integral de una función con valores en un espacio de Banach dada por Bochner. Pero todavía había que popularizar la nueva teoría y convertirla en una herramienta matemática de uso corriente puesto que para inicios del siglo XX la consideraban únicamente como un instrumento de alta precisión y delicado manejo, destinado solamente a trabajos de sutileza y abstracción extremas. Esa fue la obra de Constantin Carathéodory, plasmada en su libro *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin, 1918, que se consideró durante mucho tiempo como un clásico y que enriqueció además la teoría de Radon con numerosas observaciones originales.

Pero es también en ese libro cuando, por primera vez, la noción de integral, que había sido una de las preocupaciones principales de Lebesgue, cede la primicia a la de medida, que para Lebesgue (como antes para Jordan) sólo había sido un medio técnico auxiliar.

1.2. Notación y nociones básicas

El texto está basado en la Axiomática de Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos. En el apéndice aparece la lista de axiomas de este sistema. Se denotará por ZF a los axiomas de Zermelo-Fraenkel sin el Axioma de Elección, denotado AC. También se denota por ZFC al sistema ZF junto con el Axioma de Elección. A lo largo del texto se usa el Axioma de Elección sin hacer mención explícita de ello. Muy ocasionalmente se menciona a $\mathsf{AC}_{\aleph_0}$, el Axioma de Elección restringido a familias numerables de conjuntos. Por $\mathsf{ZF}+\mathsf{AC}_{\aleph_0}$ deberá entenderse al sistema de axiomas ZF junto con $\mathsf{AC}_{\aleph_0}$.

Se usa la notación estándar para el álgebra de conjuntos como intersecciones, uniones y complementos. Aquí sólo se recuerda la notación para la diferencia simétrica de los conjuntos A y B, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Las funciones son conjuntos de pares ordenados, el conjunto de las primeras coordenadas de la función es el dominio de la función, mientras que el conjunto de las segundas coordenadas de la función es el rango de la función. Se usa la notación habitual en estos casos: $f : X \to Y$. La evaluación de la función f en el punto $x \in X$ se denota por $f(x)$, mientras que la imagen de un subconjunto A de X se denota por $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$. La imagen inversa de B es $f^{-1}[B] = \{x : f(x) \in B\}$. Cabe hacer notar la diferencia entre $f(C)$ y $f[C]$. La primera es la evaluación de la función en el punto (conjunto) C, que bien puede también ser un subconjunto del dominio de la función y así $f[C]$ tiene sentido y es el conjunto de imágenes de la función en los elementos de C. La restricción de una función g a un subconjunto J de su dominio se denota por $g \restriction J$.

La unión de una familia de conjuntos $\mathscr{F}$ se denota de dos maneras indistintamente; como $\bigcup \mathscr{F}$ o como $\bigcup \{F : F \in \mathscr{F}\}$. Hay un comentario enteramente análogo para la intersección de una familia de conjuntos.

El producto cartesiano de una familia de conjuntos $\{X_s : s \in S\}$ es el conjunto $\prod_{s\in S} X_s$ que consta de todas las funciones $x : S \to \bigcup_{s\in S} X_s$ de modo que $x(s) = x_s \in X_s$ para cada $s \in S$. En ocasiones conviene más expresar a los elementos de un producto en su notación como vectores,

$$x = \langle x_s : s \in S \rangle \in \prod_{s\in S} X_s.$$

Si $T \subseteq S$ y $x \in \prod_{s\in S} X_s$, entonces se tiene que $x \restriction T \in \prod_{t\in T} X_t$. Del mismo modo, si

$$y \in \prod_{t\in T} X_t \quad \text{y} \quad z \in \prod_{s\in S\setminus T} X_s$$

entonces la *concatenación* de y y z es el elemento $x = y^\frown z$ del producto $\prod_{s\in S} X_s$ definido por las relaciones:

2

Conjuntos medibles de Lebesgue

En este capítulo se introduce la familia de conjuntos medibles y se estudian las propiedades fundamentales de ellos. Se procede de manera cercana a como surgieron históricamente los conjuntos medibles según Lebesgue. Primero se introducen los conjuntos medibles según Jordan para ganar un poco de intuición lo que permitirá ver al concepto de conjunto medible de una manera más natural. Primero se trabaja en $\mathbb{R}^k$ aunque el estudiante puede pensar todo el tiempo que $k = 2$ para tener más idea geométrica de los conceptos presentados.

Después de introducir los conjuntos medibles según Jordan en $\mathbb{R}^k$, ya no tiene sentido seguir cargando esa k todo el tiempo. Las discusiones se concentran en los conceptos para $\mathbb{R}$; luego se retoman las discusiones sobre $\mathbb{R}^k$ después de la introducción de las medidas producto.

2.1. Conjuntos medibles según Jordan

Empezaremos por una pregunta esencial: ¿Cómo medir conjuntos en $\mathbb{R}^k$? En $\mathbb{R}^k$ tenemos la noción natural de volumen para algunos subconjuntos y podemos usar esa idea para generalizar definiendo una *caja* en $\mathbb{R}^k$ como un conjunto de la forma $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k$, donde cada I_i es un intervalo en $\mathbb{R}$ de alguna de las siguiente formas: $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b) o bien $(a,b]$. Es muy natural definir el volumen de una caja como el producto de la longitud de los intervalos que la forman; es decir, si $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$, entonces el volumen de B es

$$v(B) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_k - a_k).$$

Definición 2.1. Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^k$ se llama *elemental* si E es una unión finita de cajas.

En cierto modo los conjuntos elementales de $\mathbb{R}^k$ son los primeros ejemplos de conjuntos naturales a los que la noción de volumen puede ser extendida. Se requiere de dos resultados obvios.

Lema 2.2. *Si E y F son subconjuntos elementales de $\mathbb{R}^k$, entonces también son elementales $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ y $E \triangle F$, la diferencia simétrica.*

La demostración del lema anterior es inmediata, al igual que la del siguiente. Se le encarga al lector que piense en los detalles y los escriba.

Lema 2.3. *Si E es un subconjunto elemental de $\mathbb{R}^k$, entonces E puede expresarse como unión ajena de cajas.*

El resultado anterior da la posibilidad de extender de manera muy natural la noción de volumen teniendo en cuenta que todos los intervalos $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ y (a,b) tienen la misma longitud: $b-a$.

Definición 2.4. La *medida* de un subconjunto elemental E de $\mathbb{R}^k$ se define como $\mu(E) = \sum_{i=1}^n v(B_i)$, donde E es la unión ajena de las cajas B_i, para $0 \le i \le n$.

Obviamente da la impresión que la medida de un conjunto elemental puede depender de cómo sea expresado como unión de cajas ajenas; pero no es así.

Lema 2.5. *Si $E = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \subseteq \mathbb{R}^k$, donde B_i es una caja para $1 \le i \le n$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $i \neq j$, entonces*

$$\mu(E) = v(B_1) + v(B_2) + \cdots + v(B_n);$$

es decir, la medida de un conjunto elemental es independiente de la partición de él en cajas ajenas.

Demostración. Primero nótese que para un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mu(I) = \lim_{N \to \infty} {}^1/_N \cdot |I \cap {}^1/_N \mathbb{Z}|,$$

donde ${}^1/_N \mathbb{Z} = \{{}^m/_N : m \in \mathbb{Z}\}$. También, si $B \subseteq \mathbb{R}^k$ es una caja, entonces

$$\mu(B) = \lim_{N \to \infty} {}^1/_N \cdot |B \cap {}^1/_N \mathbb{Z}^k|.$$

Así entonces, si $E = \bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq \mathbb{R}^k$ y cada par de cajas son ajenas, se sigue que

$$\mu(E) = \lim_{N \to \infty} {}^1/_N \cdot |E \cap {}^1/_N \mathbb{Z}^k|.$$

3

Integración

En este capítulo se introduce la integral de Lebesgue que para una amplia gama de funciones asocia un número real y que conserva las principales propiedades que tiene la popular integral de Riemann además de agregar otras importantes. La más importante es, quizás, su capacidad de funcionar adecuadamente con procesos de límites numerables.

3.1. Integración de funciones simples

La integral de Lebesgue sigue en cierto modo los pasos de la integral de Riemann al definirse primero para funciones muy sencillas y a partir de ello se llega a la integral de funciones más generales.

La integral de Riemann empieza por ser naturalmente definida sobre funciones escalón, aquí el "análogo" son las funciones características. Recuerde que para $A \subseteq \mathbb{R}$ se define

$$\chi_A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la *función característica* de A por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Definición 3.1. Una *función simple* es una función de la forma

$$f = c_0 \chi_{E_0} + c_1 \chi_{E_1} + \cdots + c_n \chi_{E_n},$$

donde $n \in \omega$, $c_i \in \overline{\mathbb{R}}$ y $E_i \in \mathfrak{M}$ para cada $i \leq n$.

La familia de todas las funciones simples será denotada por Simp.

Puede observarse con facilidad que Simp es un álgebra de funciones; es decir, es un anillo con estructura vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se denotará por Simp^+ a la colección de funciones simples no negativas, $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$.

La representación de una función simple como $f = \sum_{i \leq n} c_i \chi_{E_i}$ no es única, pero entre las representaciones para f hay una única representación estándar en la que los escalares c_i son distintos y los conjuntos E_i son ajenos, no vacíos y son tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{i \leq n} E_i$. Cuando se trate con funciones simples siempre se asumirá que se está usando su representación estándar como anteriormente fue expresado, a menos que se indique explícitamente que se está usando algo diferente.

Definición 3.2. Si $f \in \mathsf{Simp}^+$ con $f = \sum_{i \leq n} c_i \chi_{E_i}$, en su representación estándar, se define la *integral de Lebesgue* de f como

$$\int f \, d\mu = \sum_{i \leq n} c_i \cdot \mu(E_i).$$

No olvide la convención de que $0 \cdot +\infty = 0 = +\infty \cdot 0$. Ver al final de la Sección 1.2. Recuerde también que el *soporte* de una función $f : X \to \mathbb{R}$ es el conjunto

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Asimismo, se dirá que una proposición es cierta *casi por doquier* (según μ) si es cierta en todo punto del conjunto $\mathbb{R} \setminus M$, para algún conjunto M de μ-medida cero.

Proposición 3.3. *Si f y g son funciones simples no negativas, entonces*

1. $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$,
2. $\int c f \, d\mu = c \int f \, d\mu$, *para* $c \in [0, +\infty]$,
3. $\int f \, d\mu < +\infty$ *si y sólo si* $\mu(\operatorname{supp}(f)) < +\infty$ *y f es finita casi por doquier,*
4. $\int f \, d\mu = 0$ *si y sólo si* $f \equiv 0$ *casi por doquier,*
5. $f = g$ *casi por doquier, entonces* $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$,
6. $f \leq g$ *casi por doquier implica que* $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$,
7. $\int \chi_E \, d\mu = \mu(E)$.

3.7 Dar un ejemplo de una familia de funciones medibles no negativas $\{f_s : s \in S\}$ de modo que si se define $g(x) = \sup\{f_s(x) : s \in S\}$, entonces g sea siempre finita pero no sea medible.

3.8 Supóngase que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible según Lebesgue y que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Demuestre que $g \circ f$ es medible según Lebesgue. ¿El resultado es cierto si sólo se supone que g es medible según Lebesgue?

3.9 Demuestre que si f y g son funciones integrables según Lebesgue y si $\|f\|_1 = \|g\|_1$, entonces $f = g$ μ-*casi por doquier*.

3.10 Demuestre el Teorema 3.19.

3.11 Es posible mostrar que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinua tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Use AC para demostrar que tal función existe. Demuestre que si g satisface la ecuación anterior para cualquier par de reales y es medible según Lebesgue, entonces g es continua; de hecho, de la forma $g(x) = c \cdot x$.

3.12 Demuestre que las integrales superior e inferior de Lebesgue no son necesariamente aditivas si se omite la hipótesis de medibilidad.

3.13 Supóngase que $f : [a, b] \to [0, +\infty]$ es Riemann integrable. Demuestre que si se extiende f a $\mathbb{R}$ haciendo f igual a cero para cada punto fuera de $[a, b]$, entonces f es Lebesgue integrable y que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f\,d\mu.$$

4

Medidas abstractas

Como ya se ha discutido antes, la teoría de la medida nació como teoría de la integración primero para funciones de variable real y después para $\mathbb{R}^n$. Fue hasta que Radon y Fréchet dieron el paso final al definir medidas de manera abstracta; así hoy se tiene esta generalidad que es tan útil en muchas aplicaciones como la moderna Teoría de la Probabilidad que a menudo requiere de integración sobre espacios abstractos de dimensiones infinitas y obviamente no localmente compactos como los $\mathbb{R}^n$.

4.1. σ-álgebras

Definición 4.1. Sea X un conjunto (preferentemente no vacío). Una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X se llama *σ-álgebra* si

- $\emptyset \in \mathscr{A}$,
- Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathscr{A}$,
- $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{A}$ implica $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathscr{A}$.

Al par $(X, \mathscr{A})$ se le llama *espacio medible*. A los elementos de $\mathscr{A}$ se les llama conjuntos $\mathscr{A}$-medibles.

Obsérvese que si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra y $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{A}$, entonces

$$\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathscr{A},$$

al igual que $X \in \mathscr{A}$.

La σ se usa a menudo para "sumas numerables". El concepto de álgebra de conjuntos se obtiene al considerar sólo operaciones finitas.

Ejemplo 4.2. La σ-álgebra trivial es $\{\emptyset, X\}$.

Ejemplo 4.3. La familia de subconjuntos elementales o co-elementales de $\mathbb{R}^n$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.

Ejemplo 4.4. Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son Jordan medibles o co-Jordan medibles, también es un álgebra pero no una σ-álgebra.

Ejemplo 4.5. $\mathfrak{M}$ sí es una σ-álgebra, ver Teorema 2.17.

Ejemplo 4.6. Si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre un conjunto X y $Y \subseteq X$, entonces la σ-álgebra restringida a Y es

$$\mathscr{A} \restriction Y = \{A \cap Y : A \in \mathscr{A}\}.$$

Ejemplo 4.7. $\mathscr{P}(X)$ es una σ-álgebra, llamada álgebra discreta.

Ejemplo 4.8. La familia de subconjuntos numerables o co-numerables de un conjunto X es una σ-álgebra.

Ejemplo 4.9. Si X es un conjunto y $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}(X)$, entonces la *$\sigma$-álgebra generada por $\mathscr{G}$* es

$$\mathscr{A}(\mathscr{G}) = \bigcap \{\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X) : \mathscr{A} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathscr{G} \subseteq \mathscr{A}\}.$$

Note que $\mathscr{A}(\mathscr{G})$ es la $\subseteq$-mínima σ-álgebra sobre X que contiene a $\mathscr{G}$. Si $\mathscr{G}$ es numerable, se dice que $\mathscr{A}(\mathscr{G})$ es *numerablemente generada*.

4.2. Los conjuntos borelianos

Podría decirse que en esta sección se continuará con los ejemplos dados al final de la sección anterior pero que el ejemplo que se presenta en esta sección es tan importante que reclama por sí solo una sección del presente capítulo.

Proposición 4.10. *Sean X un conjunto y $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}(X)$ no vacía. Si se define $\mathscr{G}_\alpha$ recursivamente, para $\alpha \leq \omega_1$, como sigue:*

- $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G} \cup \{X \setminus G : G \in \mathscr{G}\}$,
- $\mathscr{G}_{\alpha+1} = \{\bigcup_{n\in\omega} G_n : (\forall n \in \omega)(G_n \in \mathscr{G}_\alpha)\} \cup \{X \setminus G : G \in \mathscr{G}_\alpha\}$,
- *Si $\alpha \leq \omega_1$ es ordinal límite; entonces $\mathscr{G}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathscr{G}_\xi$,*

4.29 Una función f sobre un espacio con medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se llama *localmente medible* si la restricción de f a cada $A \in \mathscr{A}$ con $\mu(A) < +\infty$ es medible o equivalentemente si $f \cdot \chi_A$ es medible. Demuestre que f es localmente medible si y sólo si es medible con respecto a la σ-álgebra de conjuntos localmente medibles.

4.30 Realice la demostración del Teorema 4.43 (ver los comentarios después del enunciado del mismo).

4.31 Para cada $n \in \omega$, sea $f_n = {}^{-1}/_{n+1} \cdot \chi_{[0,n+1]}$. Demuestre que la sucesión $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ converge uniformemente y que sirve para mostrar que la hipótesis de no negatividad es importante en el Lema de Fatou.

4.32 Complete la demostración de la Proposición 4.55.

4.33 Demuestre que si una sucesión de funciones converge en medida a una función dada, entonces una subsucesión también converge en medida a la misma función.

4.34 Supóngase que una sucesión de funciones integrables $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ converge en L_1 a una función f y que una subsucesión converge en L_1 a una función g. Demuestre que $f = g$ *casi por doquier*.

4.35 Supóngase que $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de funciones medibles que son funciones características y que converge a una función f. Demuestre que *casi por doquier* f es la función característica de algún conjunto medible.

4.36 Demuestre el Teorema 4.62.

4.37 Use la sucesión $\langle n\chi_{[0,1]} : n \in \omega \rangle$ para mostrar que la hipótesis de que la función límite sea finita no puede ser ignorada en el Teorema de Egorov.

4.38 Demuestre que el Lema de Fatou y el Teorema de la Convergencia Dominada también son válidos si la convergencia puntual se reemplaza por convergencia en medida. (Sugerencia: Use el hecho de que una sucesión de números reales converge a u si y sólo si cada subsucesión tiene una subsucesión convergente a u.)

5

El método de Carathéodory

Este capítulo será dedicado al método más importante de generación de medidas; dicho método fue sintetizado por Constantin Carathéodory quien obviamente tuvo ascendencia griega (sus padres) pero que nació en Alemania donde también recibió su formación matemática. Jan Mařík solía decir que un conjunto medible era un cuchillo muy afilado. Se va a explicar esto un poco más adelante. Se menciona aquí porque nos parece una manera muy efectiva de asociar un concepto cotidiano a un concepto especializado y extremadamente útil.

5.1. Medidas Exteriores

Definición 5.1. Dado un conjunto X, una *medida exterior* para X es una función $\mu^*\colon \mathscr{P}(X) \to [0,+\infty]$ tal que:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) \neq 0$,
2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, si $A \subseteq B \subseteq X$,
3. $\mu^*(\bigcup_{n\in\omega} A_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu^*(A_n)$; es decir, μ^* es numerablemente subaditiva.

Ejemplo 5.2. Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente, es posible definir

$$\mu_g^*([a,b]) = g(b) - g(a),$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ y para $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mu_g^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\omega} \mu_g^*([a_n,b_n]) : A \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(a_n,b_n)\right\}.$$

5.6 Sean X un conjunto y $\vartheta\colon \mathscr{P}(X) \to [0,+\infty]$ una función de modo que $\vartheta(\emptyset) = 0$, $\vartheta(A) \leq \vartheta(B)$ siempre que $A \subseteq B \subseteq X$ y $\vartheta(A \cup B) \leq \vartheta(A) + \vartheta(B)$ siempre que $A, B \subseteq X$. Defina

$$\mathscr{R} = \{R \subseteq X : (\forall A \subseteq X)(\vartheta(A) = \vartheta(A \cap R) + \vartheta(A \setminus R))\}.$$

Demuestre que $\mathscr{R}$ es un anillo de conjuntos; es decir, que $\emptyset \in \mathscr{R}$, $R, R' \in \mathscr{R} \Rightarrow R \setminus R' \in \mathscr{R}$ y que $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{R}$. Demuestre además que $\vartheta(E \cup F) = \vartheta(E) + \vartheta(F)$ siempre que $E, F \in \mathscr{R}$ y $E \cap F = \emptyset$.

5.7 Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio con medida. Para $A \subseteq X$ defina

$$\nu^*(A) = \text{ínf}\{\mu(E) : E \in \mathscr{A} \wedge A \subseteq E\}.$$

a) Demuestre que para cada $A \subseteq X$ el ínfimo se alcanza; esto es, que hay $E \in \mathscr{A}$ tal que $A \subseteq E$ y $\mu(E) = \nu^*(A)$.

b) Demuestre que ν^* es una medida exterior sobre X.

5.8 Sea μ una medida finita sobre un álgebra $\mathscr{A}$ y μ^* la medida exterior que μ induce. Demuestre que un conjunto E es medible si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ hay una familia numerable $\{A_n : n \in \omega\}$ de elementos en $\mathscr{A}$ tal que $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n \subseteq E$ y $\mu^*(E \setminus A) < \varepsilon$.

6

Medidas Producto

Este capítulo tiene un objetivo claro, extender a más dimensiones lo hasta ahora expuesto. Es decir, que dada una familia de espacios con medida, una manera obvia de combinar esos espacios con medida es definir una medida en el producto cartesiano que esté íntimamente relacionada con las medidas de los espacios factores.

6.1. Producto de dos factores

Empezaremos la tarea de definir la medida producto primero para el caso de dos factores, que fácilmente se debe generalizar al producto de una cantidad finita de factores.

Definición 6.1. Sean $(X, \mathscr{A}_X, \mu)$ y $(Y, \mathscr{A}_Y, \nu)$ dos espacios con medida. Se llamará *rectángulos* a los conjuntos de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathscr{A}_X$ y $B \in \mathscr{A}_Y$.

El siguiente lema puede establecerse sin dificultad si se tiene en cuenta que $\mathscr{A}_X$ y $\mathscr{A}_Y$ son σ-álgebras.

Lema 6.2. *Si $(X, \mathscr{A}_X, \mu)$ y $(Y, \mathscr{A}_Y, \nu)$ son dos espacios con medida, la familia $\mathscr{R}$ de todas las uniones finitas de rectángulos es un álgebra de conjuntos.*

Es un ejercicio demostrar que cada elemento de $\mathscr{R}$ puede expresarse como unión ajena finita de rectángulos.

La σ-álgebra producto debería ser tal que al menos los rectángulos resulten conjuntos medibles; además, tal como pasa con la topología producto (sin duda más

6.5 Sean $(X, \mathscr{A}_X, \mu)$ y $(Y, \mathscr{A}_Y, \nu)$ dos espacios con medida σ-finita. Demuestre que si $\mathscr{A}_Z$ es la σ-álgebra producto sobre $Z = X \times Y$, entonces todo subconjunto compacto y G_δ de Z es $\mathscr{A}_Z$-medible y que cada función continua y con soporte compacto de Z en $\mathbb{R}$ es medible.

6.6 Demuestre que si $a_{m,n} \geq 0$, para $m, n \in \omega$, entonces

$$\sum_{m\in\omega}\sum_{n\in\omega} a_{m,n} = \sum_{n\in\omega}\sum_{m\in\omega} a_{m,n}.$$

6.7 Sean $a_{m,n}$ definidos para $m, n \in \omega$ por $a_{n,n} = 1$, $a_{n,n+1} = -1$ y $a_{m,n} = 0$ si $m \notin \{n, n+1\}$. Muestre que

$$\sum_{m\in\omega}\sum_{n\in\omega} a_{m,n} = 0, \quad \sum_{n\in\omega}\sum_{m\in\omega} a_{m,n} = 1.$$

Así la hipótesis de integrabilidad en el Teorema de Fubini no puede ser removida.

6.8 Complete los detalles del Ejemplo 6.14.

6.9 Sea $\{(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i) : i \in I\}$ una familia de espacios con medida tal que para cada $i \in I$ $\mu_i(X_i) = 1$ y $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es su espacio producto; para cada $i \in I$ sea $A_i \in \mathscr{A}_i$. ¿Qué se puede decir de la σ-álgebra producto sobre $A = \prod_{i\in I} A_i$ con respecto a la σ-álgebra de X restringida a A? Ver Ejemplo 4.6.

6.10 Demuestre que para cualquier $s \in [0,1]$ y cualquier conjunto I, hay una medida λ sobre $\mathscr{P}(I)$ tal que $\lambda(\{A \subseteq I : J \subseteq A\} = s^{|J|}$ para cualquier subconjunto finito J de I.

6.11 Considere a $[0,1)$ con la σ-álgebra de Borel y la medida de Lebesgue; sea $X = [0,1)^\omega$ con la σ-álgebra producto y la medida producto. Demuestre que existe una biyección entre $[0,1)$ y X de modo tal que cada conjunto de Borel en $[0,1)$ corresponde a un conjunto medible en X y que los conjuntos correspondientes tienen igual medida. (Sugerencia: Al representar cada elemento de $[0,1)$ con expansión binaria se obtiene una biyección con 2^ω. Use el hecho de que $(2^\omega)^\omega$ se puede biyectar con 2^ω.)

6.12 Muestre que si $\{(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i) : i \in I\}$ es una familia de espacios con medida y X es el espacio producto de ella, entonces $Y \subseteq X$ es medible si y sólo si existen conjuntos $N \subseteq I$ numerable y $Y_i \in \mathscr{A}_i$, para cada $i \in N$, tales que $Y = \prod_{i\in N} Y_i \times \prod_{i\in I\setminus N} X_i$.

7
Espacios L_p

Dada la importancia de los espacios L_p dentro del análisis así como en sus aplicaciones y para completar de alguna manera los comentarios que se hicieron en la sección 4.5, en este capítulo se definen estos espacios, se prueban las importantes desigualdades de Hölder; Minkowski y como una aplicación de ellas se prueba que estos espacios L_p son espacios de Banach. Se introduce también el espacio $L_\infty(X)$ y se demuestra que es un espacio de Banach. Se completa el capítulo con tres secciones que presentan aspectos especiales de estos espacios: la densidad de los espacios $L_p(X)$ para $p \in [0,+\infty)$, el hecho de que cualquier espacio de Hilbert es isomorfo a un espacio $L_2(X)$ y que el espacio $L_2(X)$ puede descomponerse como suma directa de cualquiera de sus subespacios cerrados y su ortogonal.

7.1. Desigualdades de Hölder y de Minkowski

Del mismo modo como en la Definición 4.38 se definió $\|\cdot\|_1$, se puede definir, para $p > 1$ y $(X, \mathscr{A}, \mu)$, un espacio con medida,

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

siempre que $\int |f|^p \, d\mu < +\infty$. Así como en el caso de $\|\cdot\|_1$, una vez más $\|\cdot\|_p$ no es una norma porque $\|f\|_p = 0$ no implica necesariamente que $f = 0$, pero al igual que en el caso de $\|\cdot\|_1$, si se define la relación de equivalencia: $f \sim g$ si y sólo si $\|f - g\|_p = 0$, entonces en el conjunto cociente, $\|\cdot\|_p$ sí se convierte en una norma. Aquí también se

7.15 Encuentre una sucesión que converja a cero, pero que no pertenezca a ningún espacio ℓ_p, para $p \in [0, +\infty)$.

7.16 Encuentre una sucesión x tal que $x \in \ell_p$, para $p > 1$, pero $x \notin \ell_p$.

7.17 ¿Cuál es la topología que 2^ω obtiene como subespacio de ℓ_∞?

7.18 Demuestre que si μ es una medida Borel sobre un espacio Hausdorff y segundo numerable, entonces

$$\{A \subseteq \mathscr{B}(X) : (\forall \varepsilon > 0)(\exists U \subseteq X)(U \text{ es abierto } \wedge\ A \subseteq U\ \wedge\ \mu(U \setminus A) < \varepsilon)\}$$

es la σ-algebra de Borel.

7.19 Demostrar el Lema 7.17.

7.20 Del Teorema 7.18 se deduce directamente que $L_p(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mu)$ es separable. ¿Por qué el Corolario 7.19 no es falso?

7.21 Use el Lema de Kuratowski-Zorn para demostrar que todo espacio de Hilbert diferente de $\{0\}$ contiene un conjunto total.

7.22 Sea X un espacio de Hilbert separable y sea $D \subseteq X$ denso numerable. Demuestre que X contiene una sucesión total que puede ser obtenida a partir de D. Concluya que si X es un espacio de Hilbert separable, entonces se puede de construir un conjunto total sin la ayuda del Lema de Kuratowski-Zorn.

7.23 Demuestre que si X es un espacio de Hilbert seprable y E es un subconjunto ortonormal, entonces E puede extenderse a un conjunto total en X.

7.24 Sea E un subconjunto total en un espacio con producto interno. Si dados $u, v \in X$ se tiene que $u \cdot e = v \cdot e$, para todo $e \in E$; entonces $u = v$.

7.25 Realice las demostraciones de las Proposiciones 7.31 y 7.32.

7.26 Complete los detalles de las demostraciones de los Teoremas 7.35 y 7.38.

7.27 Demuestre que el conjunto M definido en la demostración del Teorema 7.39 es cerrado en $L_2((X, \mathscr{A}, \mu))$.

8

Cuatro importantes teoremas

Este capítulo está dedicado a cuatro resultados independientes entre sí. El primero establece una íntima relación entre los funcionales lineales no negativos definidos en el espacio vectorial de las funciones con soporte compacto y valores reales definidas sobre un espacio Hausdorff y localmente compacto. Muestra la potencia de los métodos de medida al ser capaces de representar dichos funcionales como medidas sobre el espacio, también da la posibilidad de definir multitud de medidas sobre un espacio dado. En la segunda sección se presenta un resultado que relaciona dos medidas sobre un espacio mediante la integral de una función, la “derivada” de una medida respecto de la otra. La tercera sección es de naturaleza diferente pues expone un resultado que en cierto modo dice que la concentración de un conjunto medible alrededor de un punto es total o rala, muy escasa. El último de los resultados que se presentan es una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo, pues establece que la integral de Lebesgue es derivable y que su derivada es la esperada.

8.1. Teorema de Representación de Riesz

Esta sección está dedicada a uno de los resultados más famosos e importantes del análisis moderno. Durante toda la sección, X será un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto, $C(X)$ representará el conjunto de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ mientras que $C^+(X)$ es el conjunto de todas las $f \in C(X)$ tales que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in X$. Otro conjunto de funciones que se empleará es $C_c(X)$, las funciones con soporte compacto; es decir, $f \in C(X)$ tiene soporte compacto si existe un subconjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus K$. De modo

8.13 Sean $f \in L_1(\mathbb{R}^k)$ y M_f la función maximal de Hardy-Litlewood; es decir, la que se define justo antes de la Proposición 8.23.

a) Encuentre M_f si $f = \chi_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Demuestre que M_f es medible.

c) Demuestre que si $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $\|f\|_1 > 0$, entonces se tiene que $M_f \notin L_1(\mathbb{R})$.

8.14 Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = (x(\log x)^2)^{-1}$ para $x \in (0, {}^1/_e)$ y $f(x) = 0$ en otro caso. Verifique que $f \in L_1(\mathbb{R})$ y que

$$\int_{(0,x)} f \, d\mu = {}^{-1}/_{\log x},$$

para $x \in (0, {}^1/_e)$. Concluya que $\int_{(0,r)} M_f \, d\mu = +\infty$ para todo $r > 0$.

8.15 Aplique el Teorema de la Diferenciabilidad de la Integral de Lebesgue a una función característica para deducir el Teorema de la Densidad de Lebesgue.

8.16 Sean μ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^k$ y ν otra medida sobre $\mathbb{R}^k$ que es absolutamente continua con respecto a μ. Demuestre que para la derivada de Radon-Nikodým se tiene que

$${}^{d\nu}/_{d\mu}(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\nu(\mathbb{B}(x,r))}{\mu(\mathbb{B}(x,r))},$$

para $x \in \mathbb{R}^k$.

9

El Teorema de Isomorfismo Borel

Este capítulo está dedicado a presentar el Teorema de Kuratowski sobre la clasificación de espacios medibles con la σ-álgebra de Borel. Se empieza por presentar algunas de las propiedades más relevantes de espacios polacos, después se presentan algunos hechos importantes sobre espacios estándar de Borel y en la tercera sección se completa la demostración del teorema. No sólo se presentan los elementos necesarios para la demostración sino que se ha decidido incluir algunos resultados de interés propio y que dan muestra del tipo de razonamientos y las técnicas empleadas en esta área de la teoría.

En la Sección 4.2 se introdujo una de las σ-álgebras más importantes: la σ-álgebra de Borel; es decir, la σ-álgebra $\mathscr{B}(X)$ generada por los conjuntos abiertos de un espacio topológico X. Se presentó de manera somera la jerarquía de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, entre otras cosas. En el presente capítulo se estudiará más la clase de los espacios de Borel.

9.1. Espacios polacos

Con seguridad el lector ya habrá tenido oportunidad de convivir con esta clase de espacios aunque posiblemente la terminología sea nueva.

Definición 9.1. Un espacio topológico X es un *espacio polaco,* si es separable y completamente metrizable.

Recuerde que una sucesión en un espacio métrico (X, d), $\langle x_n : n \in \omega \rangle$, es una *sucesión de Cauchy* si $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$; y que el espacio se llama *completo* la siguiente condición: Para todo $n \in \omega$ y cualesquiera $A_i \in \mathscr{B}(X)$, $i \leq n$ se tiene que

$$\mu_{n+1}(A_0 \times \cdots \times A_n \times X) = \mu_n(A_0 \times \cdots \times A_n).$$

Si $\mathscr{B}_\omega$ es la σ-álgebra producto sobre X^ω, entonces existe una única medida μ_ω sobre $(X^\omega, \mathscr{B}_\omega)$ tal que $\mu_\omega(X^\omega) = 1$ y se cumple que

$$\mu_\omega(A_0 \times \cdots \times A_n \times X^{(n)}) = \mu_n(A_0 \times \cdots \times A_n),$$

para cualesquiera $A_i \in \mathscr{B}(X)$, con $i \leq n$. (Ver Sección 6.2.)

1) Defina

$$\mathscr{S}_n = \{A_0 \times \cdots \times A_n \times X^{(n)} : (\forall i \leq n)(A_i \subseteq X \text{ es compacto})\}$$

y $\mathscr{S} = \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{S}_n$. Muestre que es posible definir correctamente μ_ω sobre $\mathscr{S}$.

2) Sea $\mathscr{A}$ el álgebra generada por $\mathscr{S}$. Demuestre que cualquier elemento de $\mathscr{A}$ se puede expresar como unión de una subfamilia finita y ajena de elementos de $\mathscr{S}$.

3) Demuestre que es posible extender la definición de μ_ω a $\mathscr{A}$.

4) Use la parte (i) para demostrar que μ_ω es numerablemente aditiva sobre $\mathscr{A}$.

5) Emplee el Teorema de Carathéodory para extender μ_ω a $\mathscr{B}_\omega$.

A

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

El material presentado en el texto se rige por la axiomática ZFC, de Zermelo-Frankel junto con el Axioma de Elección; es decir, en la teoría cuyo lenguaje incluye la igualdad $=$ y la pertenencia $\in$. Esta teoría es adecuada ya que todos los conceptos matemáticos comunes se pueden interpretar en la teoría de una manera natural de tal modo que los teoremas matemáticos se convierten en teoremas de la teoría. Esto hace que ZFC sea la teoría más popular para formalizar la base de los fundamentos de las matemáticas.

Axioma 1 (de Existencia). *Hay un conjunto que no tiene elementos.*

Axioma 2 (de Extensión). *Si todo elemento de X es un elemento de Y y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces $X = Y$.*

Axioma 3 (Esquema de Comprensión). *Sea φ una fórmula. Para cualquier conjunto A hay un conjunto B tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y x satisface la fórmula φ.*

Axioma 4 (del Par). *Para cualesquiera conjuntos a y b hay un conjunto C tal que $x \in C$ si y sólo si $x = a$ o $x = b$.*

Axioma 5 (de Unión). *Para cualquier conjunto S, existe un conjunto U tal que $x \in U$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in S$.*

Axioma 6 (del Conjunto Potencia). *Para cualquier conjunto X, existe un conjunto S tal que $A \in S$ si y sólo si $A \subseteq X$.*

Axioma 7 (de Fundación). *En cada conjunto no vacío A existe $u \in A$ tal que u y A son ajenos.*

Axioma 8 (de Infinitud). *Existe un conjunto inductivo.*

Axioma 9 (Esquema de Reemplazo)**.** *Sea $\varphi(x,y)$ una fórmula tal que para todo x existe un único y para el cual $\varphi(x,y)$ se satisface.*

Para todo conjunto A, existe un conjunto B tal que, para todo $x \in A$, existe $y \in B$ para el cual $\varphi(x,y)$ se satisface.

Axioma 10 (de Elección)**.** *Todo conjunto no vacío tiene una función de elección.*

ZF denota los axiomas 1 a 9. ZFC denota ZF + el Axioma de Elección.

Bibliografía

[A] Tom M. Apostol. Calculus. Volume 1, Second Edition. *John Willey & Sons*, 1967.

[As] Jesús A. Astorga Moreno. Medidas Tipo Lebesgue. Tesis de Maestría. Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, *UNAM-UMSNH*, 2013.

[AG] Jesús A. Astorga-Moreno, Salvador García-Ferreira. *Outer Measures on the real line by weak selections.* Real Analysis Exchange **39**(1) 2013/2014, 101–116.

[B] Robert G. Bartle. The elements of integration. *John Wiley & Sons, Inc.*, New York-London-Sydney, 1966.

[BJ] Tomek Bartoszyński, Haim Judah. Set Theory, on the structure of the real line. *A K Peters, Ltd.* Wellesley MA, 1995

[CJ] Richard Courant, Fritz John. Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. *Limusa*, 1978.

[D] Jean Dieudonné. History of Functional Analysis. *North-Holland.* Amsterdam, 1981.

[E] Ryszard Engelking. General Topology. *Heldermann Verlag.* Berlin, 1989.

[F] Claude-Alain Faure. *A short proof of Lebesgue's density theorem.* Amer. Math, Monthly, **109** (2). 2002. 194–196.

[Fr] David H. Fremlin. Measure theory. Vol. 1. The irreducible minimum. *Torres Fremlin*, Colchester, 2004.

[H] Paul R. Halmos. Measure Theory. *D. Van Nostrand Company, Inc.*, New York, N. Y., 1950.

[HH] Fernando Hernández Hernández. Teoría de Conjuntos. Una introducción. *Soc. Mat. Mexicana*, Aportaciones Mat. Serie Textos, Vol. 13, 2003.

[HS] Edwin Hewitt, Karl Stromberg. Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable. Third printing. Graduate Texts in Mathematics, No. 25. *Springer-Verlag*, New York-Heidelberg, 1975.

[K] Kenneth Kunen. Set Theory. *College Publications*, 2011.

[Ke] Alexander S. Kechris. Classical Descriptive Set Theory. Graduate Texts in Mathematics, No. 156. *Springer Verlag*, 1995.

[MB] Edward J. McShane, Truman A. Botts. Análisis Real. *Aguilar*, 1971.

[M] James R. tMunkres. Topology: a first course. *Prentice Hall*. New Jersey, 1975.

[O] John C. Oxtoby. Measure and Category. Second Ed. Graduate Texts in Mathematics, No. 2. *Springer-Verlag*, New York, 1980.

[Ra] Inder K. Rana. An Introduction to Measure and Integration. Second Ed. Graduate Studies in Mathematics, No. 45. *American Math. Soc.*, 2002.

[R] Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis. *McGraw-Hill*, 1953.

[Ru] Walter Rudin. Real and Complex Analysis. *McGraw-Hill*, 1970.

[S] Stanisław Saks. Theory of the Integral. *Hafner Publishing Company*. New York, 1933.

[Si] Maurice Sion. History of measure theory in the twentieth century. Notes. http://www.math.ubc.ca/ marcus/Math507420/Math507420hist.pdf

[Sr] Sahi M. Srivastava. A Course on Borel Sets. *Springer*, Graduate Text in Mathematics, 180. New York, 1998.

[T] Terence Tao. An Introduction to Measure Theory. Graduate Studies in Mathematics v. 126 *American Math. Soc.*, Providence, Thole Island, 2011.

Índice analítico

Introducción a la teoría de la medida, de la serie *Textos* dentro
de la colección *Aportaciones Matemáticas* editada por la
Universidad Nacional Autónoma de México, se terminó de
imprimir en abril de 2018 en los talleres de
Gráficos Digitales Avanzados, S. A. de C. V. (Dataprint),
Georgia 181, Col. Nápoles, Deleg. Benito Juárez,
C.P. 03810, Ciudad de México
Tel (55)5672 3912, irinasmunoz@yahoo.com.mx
Se tiraron 200 ejemplares en papel Bond blanco de 90 gramos,
encuadernación rústica y pegado Hot Melt en cartulina
sulfatada a 12 puntos con acabado en plastificado mate.
Se utilizaron en la composición las familias tipográficas
Utopia y *Mathdesign* a 10 puntos.
El cuidado de la edición estuvo a cargo de Leonardo Espinosa.

Apoyo técnico:

Instituto de Matemáticas, UNAM

Sección de Publicaciones
Helena Lluis, Pablo Rosell, Leonardo Espinosa, Celia Osorio

Sección de Difusión
Imelda Paredes, Gabriela Artigas, Victor Hugo Alcántara,
Lissette Martínez

Diseño de portada e interiores: Pablo Rosell

PUBLICACIONES DEL
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MONOGRAFÍAS DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

1 *Localization in non commutative rings.* B.J. Mueller (1975).
2 *Teoría de los números algebraicos.* A. Díaz-Barriga, A.I. Ramírez-Galarza, F. Tomás (1975).
3 *Integrales de medida positiva.* G. Zubieta (1976).
4 *Rings with polynomial identities.* B.J. Mueller (1977).
5 *Grupos profinitos, grupos libres y productos libres.* L. Ribes (1977).
6 *Introducción a la teoría de las clases características en la geometría algebraica.* A. Holme (1978).
7 *Embeddings, projective invariants and classifications.* A. Holme (1979).
8 *The relative spectral sequence of Leray-Serre for fibrations pairs.* C. Prieto (1979).
9 *Caminatas aleatorias y movimiento browniano.* D.B. Hernández (1981).
10 *On polarized varieties.* T. Matsusaka (1981).
11 *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones.* C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón (1982).
12 *Espacios simplécticos sobre β-anillos y anillos de Hermite, trasvecciones simplécticas.* E. Fernández Bermejo (1982).
13 *Abelian integrals.* G. Kempf (1983).
14 *On Selfinjective algebras of finite representation type.* J. Waschbüsch (1983).
15 *On ideal theory in Banach and topological algebras.* W. Zelazko (1984).
16 *Teoría general de procesos e integración estocástica.* T. Bojdecki (1985).
17 *La figura espectral de operadores.* C. Hernández Garciadiego, E. de Oteyza (1986).
18 *Teoría de punto fijo.* A. Dold. Traducción: C. Prieto. Vol. I, Vol. II, Vol. III (1986).
19 *Projective embeddings of algebraic varieties.* J. Roberts (1988).
20 *Teoría general de procesos e integración estocástica.* 2a. Edición. T. Bojdecki (1989).
21 *Análisis funcional I.* C. Bosch Giral, E. Fernández Bermejo (1989).
22 *Introducción a la topología de las variedades de dimensión infinita.* L. Montejano (1989).
23 *Introducción a la teoría de representaciones de álgebras.* R. Martínez-Villa (1990).

Memorias del 50 aniversario del Instituto de Matemáticas. 1942–1992.

Matemáticas en la UNAM. Memorias del 60 Aniversario del Instituto de Matemáticas. (2003).

Topología algebraica. Un enfoque homotópico. M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto. Coedición de Instituto de Matemáticas, UNAM – McGraw-Hill Interamericana Editores (1998).

TEMAS DE MATEMÁTICAS PARA BACHILLERATO

1 *Cuando cuentes cuántos. . .* H. A. Rincón Mejía 1a. Reimpresión de la 2a. edición (2009).
2 *Sistemas de ecuaciones y de desigualdades.* A. I. Ramírez-Galarza. 1a. Reimpresión de la 1a. Edición (2008).
3 *La historia de un empujón: un vistazo a las ecuaciones diferenciales ordinarias y a los sistemas dinámicos.* L. Ortiz Bobadilla y E. Rosales González. 3a. reimpresión de la 1a. edición (2017).
4 *Dos o tres trazos.* S. Cárdenas Rubio. 2a. edición (2008).
(La nueva edición de este título se encuentra en la colección *papirhos*)
5 *Estadística descriptiva para bachillerato.* M. P. Alonso Reyes, J. A. Flores Díaz (2004).
6 *Relaciones de equivalencia.* M. Cruz Terán. (2006).
7 *Mosaicos.* L. Hidalgo. (2007).
8 *Funciones Circulares.* M. Cruz Terán. (2008).

PAPIRHOS

Serie: MIXBAAL

1 *Por la senda de los círculos.* C. Neve Jiménez, L. Rosales Ortiz. 1a. Edición (2017)

Serie: ICOSAEDRO

1 *Dos o tres trazos.* S. Cárdenas Rubio. 2a. Edición (2017)
2 *Cónicas, cuádricas y aplicaciones.* A. I. Ramírez-Galarza. 1a. Edición (2015)

Serie: TEXTOS

1 *Grupos I.* D. Avella Alaminos, O. Mendoza Hernández, E. C. Sáenz Valadez, M. J. Souto Salorio. 3a. Edición (2017)
2 *Análisis Matemático.* M. Clapp. 2a. Edición (2017).
3 *Topología Diferencial.* V. Guillemin, A. Pollack. 1a. Edición (2015)
4 *Grupos II.* D. Avella Alaminos, O. Mendoza Hernández, E. C. Sáenz Valadez, M. J. Souto Salorio. 1a. Edición (2016)
5 *Geometría euclidiana bidimensional y su grupo de transformaciones.* M. Cruz López, M. García Campos. 1a. Edición (2017).
6 *Curso introductorio de Álgebra I.* D. Avella Alaminos, G. Campero Arena. 1a. Edición (2017).
7 *Clases características.* J. Milnor, J. Stasheff. 1a. Edición (2017).
8 *Introducción a la teoría de Galois.* F. Zaldívar Cruz. 1a. Edición (2018) (Por aparecer).

Serie: NOTAS

1 *Teoría de singularidades en topología, geometría y foliaciones I.* Editado por L. Ortiz Bobadilla, J. Snoussi. 1a. Edición, (2017)
2 *Teoría de singularidades en topología, geometría y foliaciones II.* Editado por L. Ortiz Bobadilla, J. Snoussi. 1a. Edición, (2017)

CUADERNOS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS

1 *Combinatoria.* M. L. Pérez-Seguí. 2a. edición (2016)
2 *Principios de olimpiada.* A. Illanes Mejía. 2a. edición (2017).
3 *Geometría.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. 1a. reimpresión de la 2a. edición (2017).
4 *Geometría. Ejercicios y problemas.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. 2a. edición (2016).
5 *Teoría de números.* M. L. Pérez-Seguí. 2a. edición (2016).
6 *Desigualdades.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. 5a. edición (2016).
6a *Inequalities.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega 1a. edición (2005). (Traducción del libro "Desigualdades").
7 *Olimpiadas en SLP, elemental.* R. Bulajich, C. J. Rubio 2a. edición (2016).
8 *Olimpiadas en SLP, avanzado.* R. Bulajich, C. J. Rubio 2a. edición (2017).
9 *Matemáticas preolímpicas.* M. L. Pérez-Seguí. 2a. edición (2017).
10 *Combinatoria para olimpiadas internacionales.* P. Soberón. 2a. edición (2017).
11 *Problemas avanzados de olimpiada.* A. Alberro, R. Bulajich, C. J. Rubio 2a. edición (2017).
12 *Combinatoria avanzada.* M. L. Pérez-Seguí. 2a. edición (2018) (Por aparecer).
13 *Principio de las casillas.* J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. 3a. edición (2017).
14 *Álgebra.* R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. 1a. reimpresión de la 3a. edición (2017).

APORTACIONES MATEMÁTICAS

Serie: INVESTIGACIÓN

1 *Coloquio de sistemas dinámicos. Memorias. Guanajuato, México, 1983.* Editado por J.A. Seade, G. Sienra (1985).
2 *Categorical topology - The complete work of Graciela Salicrup.* Edited by H. Herrlich, C. Prieto (1988).
3 *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies.* X. Gómez-Mont, L. Ortíz-Bobadilla. 2a. edición (2004).
4 *Simposio de probabilidad y procesos estocásticos. Memorias. Guanajuato, México 1988.* Editado por M.E. Caballero, L.G. Gorostiza (1989).
5 *Topics in algebraic geometry. Proceedings. Guanajuato, México 1989.* Editado por L. Brambila-Paz, X. Gómez-Mont (1992).
6 *Seminario internacional de álgebra y sus aplicaciones. Memorias. México 1991.* Editado por L.M. Tovar, C. Rentería, R.H. Villarreal (1992).
7 *II Simposio de probabilidad y procesos estocásticos. I Encuentro México-Chile de análisis estocástico. Memorias. Guanajuato, México 1992.* Editado por M.E. Caballero, L.G. Gorostiza (1992).
8 *Taller de geometría diferencial sobre espacios de geometrías. Memorias. Guanajuato, México 1992.* Editado por L. del Riego, C.T.J. Dodson (1992).
9 *Poblaciones aleatorias ramificadas y sus equilibrios.* A. Wakolbinger (1994).
10 *Una Introducción a la geometría computacional a través de los teoremas de la galería de arte.* V. Estivill-Castro (1994).

11 *III Simposio de probabilidad y procesos estocásticos. Memorias. Hermosillo, México 1994.* Editado por M.E. Caballero, L.G. Gorostiza (1994).
12 *IV Simposio de probabilidad y procesos estocásticos. Memorias. Guanajuato, México 1996.* Editado por L.G. Gorostiza, J.A. León, J.A. López-Mimbela (1996).
13 *Taller de variedades abelianas y funciones theta. Memorias. Morelia, Mich., México 1996.* Editado por R. Rodríguez, J.M. Muñoz Porras, S. Recillas (1998).
14 *Modelos estocásticos.* Editado por J. M. González Barrios, L. G. Gorostiza (1998).
15 *Inverse limits.* W.T. Ingram (2000).
16 *Modelos Estocásticos II.* Editado por D. Hernández, J.A. López-Mimbela, R. Quezada (2001).
17 *Topics in infinitely divisible distributions and Lévy processes.* A. Rocha-Arteaga, K. Sato (2003).
18 *Parametric Optimization and Related Topics VII.* Editado por J. Guddat, H.Th. Jongen, J.-J. Rückmann, M. Todorov (2004).
19 *Continuum Theory: in Honor of Professor David P. Bellamy on the occasion of this 60th Birthay.* Edited by I. W. Lewis, S. Macías, S. B. Nadler, Jr. (2007).
20 *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Fibonacci Numbers and ther Applications.* Editado por Florian Luca, Pantelimon Stănică (2011).

Serie: COMUNICACIONES

1 *Programa de investigación del XVIII congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Mérida, México 1984.* Editadas por M. Clapp, J.A. Seade (1986).
2 *Teoremas límite de alta densidad para campos aleatorios ramificados.* B. Fernández (1986).
3 *Programa del XIX congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. I. Memorias. Guadalajara, México 1986.* Editadas por J.A. de la Peña, C. Prieto, G. Valencia, L. Verde (1987).
4 *Programa del XIX congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. II. Memorias. Guadalajara, México 1986.* Editado por J.A. de la Peña, C. Prieto, G. Valencia, L. Verde (1987).
5 *Programa del XX congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Xalapa, México 1987.* Editado por M.A. Aguilar, L. Salmerón, C. Vargas (1988).
6 *XXI Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Hermosillo, Sonora 1988.* Editado por F. Aranda, J. Bracho, A. Sánchez Valenzuela, A. Vargas (1989).
7 *Breve introducción a códigos detectores-correctores de error.* C. Rentería, H. Tapia, W.Y. Vélez (1990).
8 *XXII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Puebla, Puebla 1989.* Editado por P. Barrera, A. Illanes, F. O'Reilly, S. Recillas (1990).
9 *XXIII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Guanajuato, México 1990.* Editado por A. García-Máynez, L.G. Gorostiza, J. Ize, M. Mendoza (1991).
10 *La estructura de los dendroides suaves.* S. Macías Alvarez (1993).
11 *XXIV Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Oaxtepec, Morelos 1991.* Editado por O. Hernández, L. Montejano, B. Rumbos, A.A. Wawrzyñzyk (1992).
12 *XXV Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. I. Memorias. Xalapa, Veracruz 1992.* Editado por F. Larrión, A. Olvera, V. Pérez-Abreu, E. Vallejo (1993).
13 *XXV Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. II. Memorias. Xalapa, Veracruz 1992.* Editado por F. Larrión, A. Olvera, V. Pérez-Abreu, E. Vallejo (1993).
14 *XXVI Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Morelia, Mich. 1993.* Editado por M.E. Caballero, J. Delgado, A.G. Raggi, J. Rosenblueth (1994).
15 *XI Escuela Latinoamericana de Matemáticas. Memorias. UNAM, México, D.F.; CIMAT, Gto. 1993.* Editado por X. Gómez-Mont, J.A. de la Peña, J.A. Seade (1994).
16 *XXVII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Querétaro, Qro. 1994.* Editado por J.A. León, A. Nicolás, F. Ongay, A. Tamariz (1995).
17 *Grupo de estudio con la industria y cursos en matemáticas industriales. Memorias. Oaxaca, Oaxaca 1995.* Editado por A. Fitt, R. Martínez-Villa (1996).
18 *XXVIII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Colima, Colima 1995.* Editado por J.L. Morales Pérez, S. Pérez Esteva, F. Sánchez Bringas, G. Villa Salvador (1996).
19 *Problemas combinatorios sobre conjuntos finitos de puntos.* B.M. Ábrego Lerma (1997).
20 *XXIX Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. San Luis Potosí, SLP 1996.* Editado por F. Avila Murillo, R. Montes-de-Oca, R. del Río Castillo, J. Muciño-Raymundo (1997).
21 *IV Escuela de verano de geometría y sistemas dinámicos. Memorias. Cimat, Guanajuato 1997.* Editado por O. Calvo, R. Iturriaga (1998).
22 *XXX Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Aguascalientes, Ags. 1997.* Editado por A. López Mimbela, M. Neumann, M. Rzedowski, M. Shapiro (1998).
23 *Segundo grupo de estudio con la industria y cursos en matemáticas industriales. Memorias. Cocoyoc, Mor., México. 1997.* Editado por A. Fitt, R. Martínez-Villa, H. Ockendon (1999).

24 *3rd. International conference on approximation and optimization in the Caribean. Proceedings. Puebla, México. 1995.* Editado por B. Bank, J. Bustamante, J. Guddat, M. A. Jiménez, H. Th. Jongen, W. Römisch (1998).
25 *XXXI Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Hermosillo, Son. 1998.* Editado por P. Padilla, R. Quiroga, C. Signoret, A. Soriano (1999).
26 *Tendencias interdisciplinarias de las matemáticas.* Editado por S. Gitler, C. Prieto (2000).
27 *XXXII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Guadalajara, Jal. 1999.* Editado por L. Hernández Lamoneda, R. Quezada, J. Martínez Bernal, H. Sánchez Morgado (2000).
28 *Lecturas Básicas en Topología General.* Editado por L. M. Villegas, A. Sestier, J. Olivares (2000).
29 *XXXIII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Saltillo, Coah. 2000.* Editado por J. Alfaro, M. Eudave, J. González Espino-Barros, E. Pérez Chavela (2001).
30 *XXXIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Toluca, Méx. 2001.* Editado por G. Contreras, C. Rentería, E. R. Rodríguez, C. Villegas Blas (2002).
31 *Tópicos de Geometría Algebraica.* Editado por L. Brambila, P. L. del Angel, A. García Zamora, J. Muciño (2002).
32 *XXXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Durango, Dgo. 2002.* Editado por M. Aguilar, R. Quiroga (2003).
33 (Número cancelado.)
34 *XXXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Pachuca, Hgo. 2003.* Editado por M. Aguilar, R. Quiroga (2004).
35 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, R. Quiroga (2005).
36 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, R. Quiroga (2006).
37 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2007).
38 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2008).
39 *Modelos en estadística y probabilidad.* Editado por J. M. González-Barrios, J. A. León, A. Pérez, L. A. Rincón, J. Villa (2008).
40 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2009).
41 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2010).
42 *Las matemáticas a través de los 50 años de la ESFM del IPN.* Editado por Lino Feliciano Reséndis, Luis Manuel Tovar (2011).
43 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2011).
44 *Modelos en estadística y probabilidad II.* Editado por J. M. González-Barrios M., J. A. León Vázquez, J. Villa Morales (2011).
45 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2012).
46 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2013).
47 *Modelos en estadística y probabilidad III.* Editado por J. M. González-Barrios M., J. A. León Vázquez, J. Villa Morales, R. A Navarro Cruz (2014).
48 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2014).
49 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2015).
50 *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.* Editado por M. Aguilar, L. Hernández Lamoneda (2016).
51 *Modelos en estadística y probabilidad IV.* Editado por J. Álvarez Mena, J. M. González-Barrios M., J. A. León Vázquez, R. A López Martínez (2017).

Serie: TEXTOS

1 *Introducción a la topología – Graciela Salicrup.* Editado por J. Rosenblueth, C. Prieto. Nivel medio. 1a. Reimpresión (1997).
2 *Procesos estocásticos.* C. Tudor. Nivel avanzado. 3a. Edición (2002).
3 *Lectures on continuous-time Markov control processes.* O. Hernández-Lerma. Nivel avanzado (1994).
4 *Un curso de lógica matemática.* C.R. Videla. Nivel avanzado (1995).
5 *Rudimentos de mansedumbre y salvajismo en teoría de representaciones.* F. Larrión, A. G. Raggi, L. Salmerón. Nivel avanzado (1995).
6 *Teoría general de procesos e integración estocástica.* T. Bojdecki. Nivel avanzado. 1a. Reimp. (2004).
7 *Intersection theory.* S.X. Descamps. Nivel avanzado (1996).
8 *Inverse problems.* H.W. Engl. Nivel avanzado (1996).
9 *El ABC de los splines.* P. Barrera, V. Hernández, C. Durán. Nivel elemental (1996).
10 *Lo antiguo y lo nuevo acerca de los conjuntos convexos.* H. Hadwiger. Traducción: L. Montejano. Nivel medio (1998).
11 *Matemáticas para las ciencias naturales.* J.L. Gutiérrez Sánchez, F. Sánchez Garduño. Niveles medio y avanzado (1998).
12 *Introducción a la teoría de redes.* M.C. Hernández Ayuso. Nivel medio 2a. Edición (2005).
13 *Teoría de conjuntos (una introducción).* F. Hernández Hernández. Nivel medio 1a. Edición (2017).
14 *Lectures on quantum probability.* A. M. Chebotarev. Nivel avanzado (2000).

15 *Construcción de procesos autosimilares con variancia finita.* J. E. Figueroa López. Nivel avanzado (2000).
16 *Grupos algebraicos y teoría de invariantes.* C. Sancho de Salas. Nivel avanzado (2001).
17 *Cohomología de Galois de campos locales.* F. Zaldívar. Nivel avanzado (2001).
18 *Dimension Theory: An Introduction with Exercises.* S. B. Nadler, Jr. Nivel avanzado (2002).
19 *Cómputo Numérico con aritmética de punto flotante IEEE. Con un teorema, una regla empírica y ciento un ejercicios.* M. L. Overton. Traducción: A. Casares Maldonado. Nivel medio (2002) Coedición SIAM.
20 *Topología diferencial.* V. Guillemin, A. Pollack. Traducción: O. Palmas Velasco. Nivel medio (2003). (La nueva edición de este título se encuentra en la colección *papirhos*)
21 *Elementos de Probabilidad y Estadística.* A. Hernández-del-Valle, O. Hernández-Lerma. Nivel elemental (2003).
22 *Topología General.* D. Hinrichsen, J. L. Fernández Muñiz, A. Fraguela Collar, Á. Álvarez Prieto. Nivel medio (2003).
23 *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones.* S. de Neymet U. Con la colaboración de R. Jiménez B. Nivel avanzado (2005).
24 *Breviario de teoría analítica de los números.* E. P. Balanzario. Nivel medio 1a. Reimpresión (2009) Coedición Reverté.
25 *Cálculo de probabilidades.* F. M. Hernández Arellano. Nivel elemental (2003).
26 *Números primos y aplicaciones.* F. Luca. Nivel avanzado (2004).
27 *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles.* F. L. Jones. Traducción: S. Macías. Nivel medio (2004).
28 *Hiperespacios de continuos.* A. Illanes. Nivel medio (2004).
29 *Cadenas de Markov.* M. E. Caballero, N. S. Hérnández, V. M. Rivero, G. Uribe Bravo, C. Velarde. Nivel medio 1a. Edición (2017).
30 *The fixed point property for continua.* S. B. Nadler, Jr. Nivel avanzado (2005).
31 *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios.* Editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Nivel medio (2006).
32 *Introducción a la teoría de grupos.* F. Zaldívar. Nivel medio 1a. Edición (2018).
33 *Hyperspaces of sets. A text with research questions.* S. B. Nadler, Jr. Nivel avanzado (2006).
34 *Introducción a la optimización no lineal.* E. Accinelli. Nivel avanzado (2009). Coedición Reverté.
35 *Graphs, rings and polyhedra.* I. Gitler, R. H. Villarreal. Nivel avanzado (2011).
36 *Introducción a la topología de conjuntos.* A. García Máynez. Nivel elemental (2011).
37 *Elementos de topología general.* F. Casarrubias Segura, A. Tamariz Mascarúa. Nivel medio 2a. edición (2015).
38 *Cálculo.* H. Arizmendi, A. Carrillo, M. Lara. Nivel elemental 2a. edición (2016).
39 *Curso elemental de probabilidad y estadística.* Luis Rincón. Nivel elemental 1a. Edición (2013).
40 *Álgebras booleanas y espacios topológicos.* R. Pichardo, Á. Tamariz. Nivel avanzado 1a. Edición (2017).
41 *Introducción a la teoría de probabilidad y métricas probabilísticas con aplicaciones en seguros y finanzas.* E. I. Gordienko, X. I. Popoca-Jiménez. Nivel medio 1a. Edición ((2018) (por aparecer).
42 *Introducción a la teoría de la medida.* F. Hernández Hernández, M. Ibarra Contreras. Nivel medio 1a. Edición (2018).

Alberto Barajas: Su oratoria, sus matemáticas y sus enseñanzas.
Edición: V. Neumann-Lara, I. Puga, S. Macías (2010) 346 p. Contiene 2 DVD.

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS EN COLABORACIÓN CON LA AMS

Contemporary Mathematics

260 *First summer school in analysis and mathematical physics. Cuernavaca, Morelos, 1998.* Editado por S. Pérez-Esteva, C. Villegas-Blas. Contemporary Mathematics No. 260. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2000).
289 *Second summer school in analysis and mathematical physics. Cuernavaca, Morelos, 2000.* Editado por S. Pérez-Esteva, C. Villegas-Blas. Contemporary Mathematics No. 289. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2001).
336 *Stochastic Models.* Editado por J. M. González-Barrios, J. A. León, A. Meda. Contemporary Mathematics No. 336. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2003).
340 *Spectral Theory of Schrödinger Operators. Lecture Notes from a Workshop on Schrödinger Operator Theory. IIMAS, UNAM, Mexico, 2001.* Editado por R. del Río, C. Villegas-Blas. Contemporary Mathematics No. 340 Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2004).

341 *Topological algebras and their applications. Fourth International Conference on Topological Algebras and Their Applications. Oaxaca, Mexico, 2002.* Editado por H. Arizmendi, C. Bosch, L. Palacios. Contemporary Mathematics No. 341. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2004).

389 *Geometry and Dynamics International Conference in Honor of the 60th Anniversary of Alberto Verjovsky. January 6-11, 2003. Cuernavaca, Mexico.* Editado por J. Eells, E. Ghys, M. Lyubich, J. Palis, J. Seade. Contemporary Mathematics No. 389. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2005).

476 *Fourth summer school in analysis and mathematical physics. Topics in Spectral Theory and Quantum Mechanics. Cuernavaca, Morelos, 2005.* Editado por C. Villegas-Blas. Contemporary Mathematics No. 476. Coedición de Aportaciones Matemáticas – American Mathematical Society (2008).

Información y pedidos:

Sección de Publicaciones
Instituto de Matemáticas, UNAM, Circuito Exterior
Ciudad Universitaria, 04510 Ciudad de México, MÉXICO
tel: +52 55 5622-4496 y 4545
e-mail: `papirhos@im.unam.mx`
e-mail: `librosdemate@im.unam.mx`
web: `http://papirhos.matem.unam.mx/`