Introducción a Teoría de la Medida

Fernando Hernández Hernández
Manuel Ibarra Contreras

A quienes nos han dejado o nos están dejando un maravilloso legado...

Contenido

Prefacio

Hay muchos muy buenos libros de medida escritos por diversos autores verdaderos especialistas en la materia y uno debería preguntar por qué uno más que seguramente no es del nivel de esos otros.

Creemos que una primera respuesta debería ser por pasión, por ganas de decir aunque sea otra vez lo mismo. Es una respuesta muy egoísta. Otra respuesta, no tan egoísta aunque no deja de serlo, es porque creemos que los libros hasta ahora en el mercado no tienen el enfoque que nosotros queremos y porque pretendemos tener un compendio de las cosas útiles para quienes estudian análisis, teoría descriptiva de conjuntos o disciplinas similares.

El texto está principalmente basado en notas de clase de cursos sobre la materia ofrecidos en diferentes semestres en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Se agradece en especial a Ricardo E. Chávez Cáliz y a René Rodríguez Aldama por acceder a que se fotocopiaran sus apuntes de clase de donde nació este texto. Se hace también una muy agradecida mención a René, César Ismael Corral Rojas y Héctor A. Barriga Acosta, quienes revisaron primeras versiones del libro que el lector tiene en sus manos. Esos apuntes estuvieron basados en el libro de Terence Tao [T]. Al escribir el texto se ha incluido material de otras fuentes que aparecen en la bibliografía; por ejemplo, se tomaron de manera íntegra algunos ejemplos del libro de Kechris [Ke]. Ninguno de los resultados que aparecen a la largo de la obra son propios, todos fueron elegidos de uno u otro lado.

El texto está pensado para un primer curso sobre Teoría de la Medida. Los dos capítulos finales están pensados como material extra. Por ejemplo, del séptimo capítulo se pueden cubrir algunas de las secciones durante el curso. En el octavo capítulo se necesita un poco más de experiencia topológica. Aunque es posible hacer todo el desarrollo para funciones de varias variables o funciones con valores complejos, se prefirió concentrarse en funciones con valores reales ya que el desarrollo para otras funciones es una modificación de los conceptos que se definieron para funciones con valores reales; por ejemplo, para definir la integral de una función f con valores complejos, se observa que en realidad $f = f_0 + if_1$ para dos funciones f_0 y f_1 con valores reales; entonces la definición de la integral de f queda en términos naturales de las integrales de f_0 y f_1.

Por supuesto que por influencia de los gustos personales, se piensa que es preferible tomar el curso después de haber llevado uno de topología y otro de teoría de conjuntos; pero claramente puede hacerse sin haber tomado alguno de estos últimos. Para los lectores a quienes les es extraño hablar de espacios métricos y/o topológicos, se puede siempre pensar simplemente en los $\mathbb{R}^k$ o incluso en $\mathbb{R}$ mismo y aún tener mucha generalidad.

Cada capítulo se acompaña de una serie de ejercicios. Es fundamental que el estudiante compruebe su nivel de asimilación del material presentado realizando la mayoría de los ejercicios. Los hay de diversa dificultad. Parte del entrenamiento que uno debe adquirir consiste en saber reconocer por uno mismo qué problemas será capaz de resolver y cuáles debe resolver con ayuda. Parte del entrenamiento debe ser aprender a pedir ayuda y con ella ser capaz de realizar las tareas antes no cumplidas.

Fernando Hernández Hernández
y Manuel Ibarra Contreras

Febrero 2017

Capítulo 1

Introducción

1.1. Historia

Casi cualquier persona con conocimientos rudimentarios en matemáticas ha escuchado que existe una importante área de estudio conocida como el Cálculo Diferencial e Integral. El cómputo de integrales es una de las tareas fundamentales del cálculo. En ocasiones se asocia de manera un tanto ingenua a la integral de una función con el área bajo la curva que produce la gráfica de la función, digamos para funciones de los reales, $\mathbb{R}$, en los reales. Esa interpretación intuitiva funciona bien para una clase amplia de funciones entre las que podemos contar a los polinomios y otras funciones elementales como las trigonométricas. Sin embargo, si se es más cauteloso, se pueden hallar funciones con definiciones relativamente sencillas para las cuales “el área bajo la curva” no tiene tanto sentido. Esa pérdida de sentido parece proceder de dos funtes hermanas, una es que hay funciones caprichosas que hacen que nuestra idea de estar “bajo la curva” se vea obligada a pensarse con más cuidado; la otra, que aunque sea claro qué es estar “bajo la curva” no sea claro por qué podemos asociar una medida a esa región. El análisis de estas cosas es de mucha importancia tanto teórica como práctica y es lo que origina la teoría de la medida y la teoría de integración de Lebesgue.

En el siglo XIX los matemáticos de la época también se esforzaron por dar una fundamentación rigurosa para el cálculo integral. Fue Bernhard Riemann (1826-1866) quien presentó una definición adecuada de la integral. La idea de Riemann es iniciar con la construcción de una sucesión de áreas fácilmente calculables y que converge a la integral de una función dada. Su idea fue muy exitosa porque daba la respuesta esperada para muchos problemas ya resueltos y daba útiles resultados para muchos otros problemas.

Sin embargo, la integración de Riemann no interactúa bien con el proceso de tomar límites de sucesiones de funciones y de hecho es difícil de analizar el paso al límite con integrales de Riemann. Desde el punto de vista de aplicaciones, es muy importante tener un muy buen comportamiento en el paso al límite para la aproximación sucesiva. La integral de Lebesgue es mucho mejor para analizar en qué casos se puede pasar de la integral de una función al cálculo del límite de las integrales de las aproximaciones sucesivas a la función dada. Dos importantes teoremas al respecto son el Teorema de la Convergencia Monótona y el Teorema de la Convergencia Dominada.

Obviamente hay ideas y motivaciones comunes en las integrales de Riemann y en la integral de Lebesgue; algo que las hace muy diferentes es que mientras la integral de Riemann se basa en particiones del dominio de la función para hacer el cómputo de la integral, la integral de Lebesgue puede manejar a una clase más ámplia de funciones porque su cómputo está basado en particiones del rango de la función y no en particiones del dominio de ella. Un ejemplo clásico es la función de Dirichlet; es decir, la función característica de los números racionales, o sea, que vale 1 en un número racional y 0 en un número irracional. Esta función tiene integral de Lebesgue pero no tiene integral de Riemann. Más aún, la integral de Lebesgue de la función de Dirichlet es cero, lo cual coincide con la intuición de que al escoger uniformemente al azar un número real del intervalo $[0, 1]$, la probabilidad de escoger un número racional debe ser cero.

Las nociones de longitud, área y volumen están esencialmente ligadas desde la época dorada de la matemática griega a la invariabilidad bajo desplazamientos rígidos; así, usando esa invariabilidad e ingeniosas subdivisiones finitas o bien el método exhaustivo, los griegos fueron capaces de obtener las áreas o los volúmenes de las figuras clásicas (polígonos, cónicas, poliedros, esferas, etc.). En el lenguaje moderno puede decirse que lo que hicieron los geómetras griegos fue demostrar la existencia de "funciones de conjunto" aditivas e invariantes por traslaciones, pero definidas solamente para conjuntos de un tipo muy especial. Puede entonces considerarse que el cálculo integral responde a la necesidad de ampliar el dominio de definición de estas funciones de conjunto. Cuando la memoria de Riemann fue publicada en 1867 (después de su muerte) la época ya era más favorable para ese tipo de investigaciones, la integral de Riemann ocupó su lugar de manera natural en la corriente de ideas que conllevaba entonces el estudio del continuo y de las funciones de variable real. Matemáticos como Weierstrass, du Bois-Reymond, Hankel, Dini, entre otros, hicieron importantes contribuciones para culminar con Cantor y el surgimiento de la teoría de conjuntos. La forma dada por Riemann a la condición de integrabilidad sugería la idea de la "medida" del conjunto de puntos de discontinuidad de una función en un intervalo, pero todavía debían transcurrir treinta años antes de que se llegase a dar una definición de medida fecunda y cómoda.

Los primeros intentos en esa dirección se deben a Stolz, Harnack y Cantor; para definir la medida de un subconjunto acotado E de $\mathbb{R}$, los dos primeros consideraban conjuntos $F \supseteq E$ que eran uniones finitas de intervalos, tomaban para cada F la suma de las longitudes de los intervalos correspondientes y llamaban *medida* de E al ínfimo de esos números. Mientras que Cantor, situándose ya desde el principio en $\mathbb{R}^n$, consideraba para un conjunto acotado E y para $\varrho > 0$, la burbuja $B(E;\varrho)$ de E formada por los puntos cuya distancia a E es a lo más ϱ y tomaba el ínfimo de los volúmenes de las burbujas $B(E,\varrho)$. Con esta definición resulta que la *medida* de un conjunto es igual al de su clausura o adherencia, de donde se deduce que la medida de la unión de dos conjuntos ajenos puede ser estrictamente menor a la suma de las medidas de estos dos conjuntos. Algunos años después Peano y Jordan introducen al lado de la medida de Cantor una *medida interior* y llaman medibles a los conjuntos en los que esos dos números coinciden (ver Definición 2.6). Con esa definición de medida, la medida de una unión de conjuntos medibles y ajenos tiene la medida esperada; sin embargo, un conjunto abierto y acotado no necesariamente es medible ni tampoco lo es el conjunto de números racionales contenido en el intervalo.

A Émile Borel (1871-1956) corresponde el mérito de haber sabido discernir los defectos de las definiciones anteriores y de haber visto la forma de remediarlos. Se sabía desde Cantor que un conjunto abierto es la unión numerable y ajena de sus componentes conexas, o sea intervalos abiertos; apoyado en este resultado Borel, en lugar de intentar aproximar por fuera a un conjunto abierto con una unión finita de intervalos, propone tomar como su medida a la suma de las longitudes de cada una de sus componentes. Junto con los trabajos contemporáneos de Baire esto era el punto de partida de toda una serie de trabajos de naturaleza topológica acerca de la clasificación de los conjuntos de puntos y serviría de base para la extensión de la noción de integral dada por Lebesgue en los primeros años del siglo XX.

Uno de los problemas a los que Lebesgue dedicó más esfuerzos fue la relación entre integral y primitiva. La motivación es clara. Con la generalización de la integral de Riemann es natural preguntarse si la correspondencia clásica entre integral y primitiva seguía siendo válida para funciones continuas y, si era válida, hasta qué punto lo era. Es fácil dar ejemplos de funciones Riemann integrables f tales que $\int_a^x f(t)\ dt$ no tenga derivada en ciertos puntos. Volterra había mostrado en 1881 que aunque la derivada de una función F sea acotada en un intervalo puede no ser integrable (en el sentido de Riemann). Mediante un análisis extraordinariamente sutil, Lebesgue consiguió demostrar que si f es integrable en su sentido en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ tiene en casi todo punto, derivada igual a $f(x)$. Recíprocamente, si una función g es derivable en $[a, b]$ y su derivada $g' = f$ es acotada, entonces f es integrable y se tiene la fórmula $g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)\ dt$.

En 1910 Lebesgue aborda la extensión a las integrales múltiples de sus resultados acerca de las derivadas de las integrales simples. De ese modo, asocia a una función f integrable sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, la función de conjunto $F(E) = \int_E f(x)\ dx$ definida para subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, que generaliza el concepto de integral indefinida y señala que esta función es completamente aditiva y absolutamente continua (en el sentido de que $F(E)$ tiende a cero si la medida de E tiende a cero). Hace notar la posibilidad de generalizar la noción de función de variación acotada, considerando las funciones $F(E)$ para conjuntos medibles y tales que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |F(E_n)|$ permanezca acotada para toda partición numerable de E en partes medibles. Y, si bien se limita a considerar solamente funciones de esta clase en el conjunto de los bloques de $\mathbb{R}^n$, está bien claro que solamente había que dar un paso para llegar a la noción general de medida que va a definir J. Radon en 1913 englobando en una misma síntesis la integral de Lebesgue y la integral de Stieltjes. Casi inmediatamente después de la aparición de la publicación de Radon, Fréchet señalaba que casi todos los resultados podían extenderse al caso en que la función de conjunto fuera completamente aditiva y estuviera definida en subconjuntos medibles de un conjunto cualquiera X.

Por supuesto, los subconjuntos medibles deberían ser tales que las operaciones de unión numerable y diferencias dieran como resultado conjuntos para los que sí está definida la función.

Con las aportaciones de Radon y Fréchet la teoría general de integración podía considerarse como terminada a grandes rasgos. Entre los avances esenciales posteriores se pueden nombrar la definición de producto infinito de medidas hecha por Daniell y la integral de una función con valores en un espacio de Banach dada por Bochner. Pero todavía había que popularizar la nueva teoría y convertirla en una herramienta matemática de uso corriente puesto que para inicios del siglo XX la consideraban únicamente como un instrumento de alta precisión y delicado manejo, destinado solamente a trabajos de sutileza y abstracción extremas. Esa fue la obra de Constantin Carathéodory, plasmada en su libro *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin, 1918, que se consideró durante mucho tiempo como un clásico y que enriqueció además la teoría de Radon con numerosas observaciones originales.

Pero es también en ese libro cuando, por primera vez, la noción de integral, que había sido una de las preocupaciones principales de Lebesgue, cede la primicia a la de medida, que para Lebesgue (como antes para Jordan) sólo había sido un medio técnico auxiliar.

1.2. Notación y nociones básicas

El texto está basado en la Axiomática de Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos. En el apéndice aparece la lista de axiomas de este sistema. Se denotará por ZF a los axiomas de Zermelo-Fraenkel sin el Axioma de Elección, denotado AC. También se denota por ZFC al sistema ZF junto con el Axioma de Elección. A lo largo del texto se usa el Axioma de Elección sin hacer mención explícita de ello. Muy ocasionalmente se menciona a $\mathsf{AC}_{\aleph_0}$, el Axioma de Elección restringido a familias numerables de conjuntos. Por $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}_{\aleph_0}$ deberá entenderse al sistema de axiomas ZF junto con $\mathsf{AC}_{\aleph_0}$.

Se usa la notación estándar para el álgebra de conjuntos como intersecciones, uniones y complementos. Aquí sólo se recuerda la notación para la diferencia simétrica de los conjuntos A y B, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Las funciones son conjuntos de pares ordenados, el conjunto de las primeras coordenadas de la función es el dominio de la función, mientras que el conjunto de las segundas coordenadas de la función es el rango de la función. Se usa la notación habitual en estos casos: $f : X \to Y$. La evaluación de la función f en el punto $x \in X$ se denota por $f(x)$, mientras que la imagen de un subconjunto A de X se denota por $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$. La imagen inversa de B es $f^{-1}[B] = \{x : f(x) \in B\}$. Cabe hacer notar la diferencia entre $f(C)$ y $f[C]$. La primera es la evaluación de la función en el punto (conjunto) C, que puede ser un subconjunto del dominio de la función y así $f[C]$ tiene sentido y es el conjunto de imágenes de la función en los elementos de C. La restricción de una función g a un subconjunto J de su dominio se denota por $g \restriction J$.

La unión de una familia de conjuntos $\mathscr{F}$ se denota de dos maneras indistintamente; como $\bigcup \mathscr{F}$ o como $\bigcup\{F : F \in \mathscr{F}\}$. Hay un comentario enteramente análogo para la intersección de una familia de conjuntos.

El producto cartesiano de una familia de conjuntos $\{X_s : s \in S\}$ es el conjunto $\prod_{s\in S} X_s$ que consta de todas las funciones $x : S \to \bigcup_{s\in S} X_s$ de modo que $x(s) = x_s \in X_s$ para cada $s \in S$. En ocasiones conviene más expresar a los elementos de un producto en su notación como vectores,

$$x = \langle x_s : s \in S\rangle \in \prod_{s\in S} X_s.$$

Si $T \subseteq S$ y $x \in \prod_{s\in S} X_s$, entonces se tiene que $x \restriction T \in \prod_{t\in T} X_t$. Del mismo modo, si

$$y \in \prod_{t\in T} X_t \quad \text{y} \quad z \in \prod_{s\in S\setminus T} X_s$$

entonces la *concatenación* de y y z es el elemento $x = y^\frown z$ del producto $\prod_{s\in S} X_s$ definido por las relaciones:

$$x \restriction T = y \quad \text{y} \quad x \restriction (S \setminus T) = z;$$

es decir, $x = y \cup z$. Si $S \setminus T = \{u\}$ y $p \in X_u$, usualmente se escribe $x = y^\frown p$ en lugar de $x = y^\frown\{\langle u, p\rangle\}$.

Para denotar la cardinalidad de un conjunto se usa el símbolo $|\cdot|$; por ejemplo, $|X|$ denota la cardinalidad del conjunto X. De particular importancia son la cardinalidad de los conjuntos numerables que se denota por $\aleph_0$, la cardinalidad del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, que se denota por $\mathfrak{c}$ y la cardinalidad del conjunto potencia de los números reales que se escribe como $2^{\mathfrak{c}}$. El conjunto potencia de un conjunto dado es la familia de todos los subconjuntos de él. El primer cardinal no numerable es $\aleph_1$.

Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica sobre X, es decir, una función no negativa, simétrica, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ y cumple la desigualdad del triángulo: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para cualesquiera $x, y, z \in X$. La bola abierta en el espacio métrico (X, d) con centro en $x \in X$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$\mathbb{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Un subconjunto U de un espacio métrico X es abierto si y sólo si es unión de alguna familia de bolas abiertas.

Un espacio topológico es un par (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X; es decir, una familia de subconjuntos que contiene a $\emptyset$ y a X además de que es cerrada bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias. A los elementos de τ se les llama conjuntos abiertos. Los complementos de los conjuntos abiertos son los conjuntos cerrados. Todo espacio métrico puede considerarse un espacio topológico. Un espacio topológico X se llama *metrizable* si hay una métrica compatible con su topología; es decir, una métrica de modo que la familia de las bolas abiertas genere la topología del espacio. Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, entonces $\overline{A}$ es la clausura o cerradura de A que es el $\subseteq$-mínimo cerrado que contiene a A, mientras que $\mathring{A}$ es el interior de A que es el $\subseteq$-máximo subconjunto abierto de A.

Si X y Y son dos espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ es *continua* si para cada subconjunto abierto V de Y se tiene que $f^{-1}[V]$ es un subconjunto abierto de X.

Un subconjunto $K \subseteq X$ se llama *compacto* si siempre que $\mathscr{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos tal que $K \subseteq \bigcup \mathscr{U}$, se tiene que existe una subfamilia finita $\mathscr{G}$ de $\mathscr{U}$ tal que $K \subseteq \bigcup \mathscr{G}$.

Los espacios euclidianos $\mathbb{R}^k$ siempre se consideran con su topología usual que es la inducida por la métrica euclidiana. En ellos se cumple un importante teorema que se enuncia a continuación.

TEOREMA 1.1 (Heine-Borel). *Un subconjunto K de $\mathbb{R}^k$ es compacto si y sólo si K es un subconjunto cerrado y acotado.*

Se emplean también los símbolos usuales para los conocidos conjuntos de números naturales positivos, números enteros, números racionales, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, respectivamente. La parte no negativa del eje real extendido es $[0, +\infty]$ que está formado por el cero, los reales positivos y un elemento adicional denotado por $+\infty$ que se declara mayor que cualquier número real. Se necesitará trabajar en este sistema porque muchos de los conjuntos tendrán medida infinita, entre otras cosas. Las operaciones de suma y multiplicación se extienden a $[0, +\infty]$ declarando $+\infty + x = x + \infty = +\infty$ para todo $x \in [0, +\infty]$ y $+\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty$ para todo $x \in (0, +\infty]$ además de $0 \cdot +\infty = 0 = +\infty \cdot 0$. También se denota, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Se debe ser cauto al hacer operaciones cuando se permite que algunas de las variables puedan tomar el valor de $+\infty$, en especial las cancelaciones puesto que $x + \infty = y + \infty$ no implica que $x = y$.

Si $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ es una sucesión de números reales extendidos, se definen el *límite superior* y el *límite inferior* de esta sucesión como

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\geq n} x_m \right) \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\geq n} x_m \right).$$

1.3. AC y el primer ordinal no numerable

Como se dijo antes, toda nuestra exposición usa la axiomatica ZFC como base. En el Apéndice A se encuentran listados los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Para una exposición más completa sobre el tema se puede consultar [HH]. En esta sección nos ocupamos del famoso Axioma de Elección, AC, que también juega un papel importante en la Teoría de la Medida. Hay muchas maneras de enunciar AC, esta vez elegimos:

DEFINICIÓN 1.2. El Axioma de Elección, AC, es la afirmación de que para cualquier conjunto no vacío X y cualquier relación de equivalencia $\sim$ sobre X, existe un conjunto de representantes; es decir, un subconjunto R de X de modo que para todo $x \in X$ existe $r \in R$ tal que $x \sim r$ y cualesquiera dos distintos $r, r' \in R$ se tiene que $r \not\sim r'$.

Como se dijo antes, hay muchas afirmaciones equivalentes al AC, en el siguiente teorema presentamos las más importantes para los fines de este volumen.

TEOREMA 1.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *El Axioma de Elección,* AC*,*
(2) *El Teorema del Buen Orden: todo conjunto no vacío puede ser bien ordenado,*
(3) *El Lema de Kuratowski-Zorn: en todo conjunto no vacío con una relación de orden parcial en el que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior, existen elementos maximales.*

Como una aplicación de este teorema se introducirá el primer ordinal no numerable de una manera económica y en la que se distinguirán sus elementos y propiedades importantes que serán empleadas más adelante.

TEOREMA 1.4. *Existe un conjunto bien ordenado* W *de modo que* W *no es numerable, pero cada uno de sus segmentos iniciales,*

$$W(x_0) = \{w \in W : w < x_0\},$$

donde $x_0 \in W$*, son numerables.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\widetilde{W}$ cualquier conjunto no numerable y considere un buen orden $\leq$ sobre $\widetilde{W}$. Si con este orden $\leq$, $\widetilde{W}$ ya satisface lo deseado, terminamos. En caso contrario sea

$$W = \{w \in \widetilde{W} : W(w) \text{ es no numerable}\}.$$

Por la suposición hecha, W no es vacío y como $\widetilde{W}$ es bien ordenado, sea $w_1 = \min W$. Entonces, necesariamente el segmento inicial $\widetilde{W}(w_1)$ satisface lo requerido. ❒

Empecemos a obtener algunas de las propiedades que tiene el conjunto afirmado en el teorema anterior.

Supóngase que $A \subseteq W$ es un subconjunto numerable, entonces A está acotado en W. En efecto,

$$B = \bigcup\{W(a) : a \in A\}$$

es un conjunto numerable y por lo tanto $W \setminus B$ no es vacío y cualquier $w \in W \setminus B$ es una cota superior de A. Mejor aún, A tiene una mínima cota superior; es decir, un supremo, basta tomar el mínimo elemento x de $W \setminus B$. Hay dos posibilidades, que x no tenga un predecesor inmediato, en tal caso $x = \sup A$ porque si $w < x$ se tiene que $w \notin W \setminus B$ y por lo tanto $w \in B$ con lo que $w < a$ para algún $a \in A$. Si x tiene un predecesor inmediato, digamos y, entonces como $y \notin W \setminus B$, existe $a \in A$ tal que $y \in W(a)$. Pero $x \notin W(a)$, se debe tener que necesariamente $x = a$.

Del argumento anterior también deducimos que W tiene dos clases de elementos, aquellos con un predecesor inmediato y los que no lo tienen. Llamaremos a los primeros *ordinales sucesores* y a los segundos *ordinales límite*.

Así como hay un conjunto bien ordenado y no numerable cuyos segmentos iniciales son numerables, también hay un conocido conjunto numerable y bien ordenado en el que todos sus segmentos iniciales son finitos: los naturales, $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Cada número natural es el conjunto de los naturales más pequeños que él; así por ejemplo, $5 = \{4, 3, 2, 1, 0\}$ y 0 es el primer número natural con lo que $0 = \emptyset$. También adoptaremos la notación más cómoda para el conjunto de los números naturales denotando por ω al conjunto de todos los números naturales; es decir,

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, 69, 70, 71, \ldots\ldots\}.$$

Con estas convenciones, cada número natural con el orden obvio es en sí mismo un subconjunto bien ordenado de ω. Cada número natural n puede obtenerse empezando del 0 y aplicando la operación sucesor inmediato, es decir, sumándole uno suficientes veces hasta llegar a n. Observe que $n + 1 = n \cup \{n\}$. Ahora, ω mismo es un conjunto bien ordenado al que también podemos aplicarle la operación sucesor: $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$. No hay por qué detenerse ahí pues fácilmente puede pensarse en $\omega + 2 = (\omega + 1) + 1 = \omega + 1 \cup \{\omega + 1\}$, etcétera para obtener $\omega + n$, para cada $n \in \omega$. Si observamos un poco, ahora tenemos a ω y después de ω tenemos una copia de ω a la que podemos nombrar $\omega + \omega$ pues

$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3 \ldots\},$$

y el proceso no tiene por qué detenerse ahí, así que podemos obtener $\omega + \omega + \omega$, $\omega + \omega + \omega + n$, $\omega + \omega + \omega + \omega$, etc. hasta llegar a tener ω copias de ω; o sea, $\omega \cdot \omega$ y continuar $\omega \cdot \omega + 1$, $\omega \cdot \omega + \omega$, etc. Sin embargo, todos los conjuntos bien ordenados obtenidos de esta forma son numerables. Es decir, podemos, en cierto modo, considerarlos a todos como subconjuntos del conjunto W asegurado en el teorema anterior.

Al conjunto W lo denotaremos más cómodamente por ω_1 y llamaremos a sus elementos *ordinales numerables*, que denotaremos por letras como $n, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \zeta$, etcétera. A los sucesores de ellos los denotaremos por $n+1, \alpha+1, \beta+1, \gamma+1, \delta+1, \xi+1, \zeta+1$, etcétera.

A manera de resumen y para futura referencia enunciamos la siguiente proposición cuyo único objeto es resumir las propiedades de ω_1.

PROPOSICIÓN 1.5. *El conjunto ω_1 es el primer ordinal no numerable y tiene las siguientes propiedades:*

(1) *ω_1 no es numerable,*
(2) *ω_1 es bien ordenado,*
(3) *$\omega \subset \omega_1$,*
(4) *Cada ordinal numerable es el conjunto de los ordinales numerables más pequeños, si $\alpha \in \omega_1$, entonces $\alpha = \{\xi \in \omega_1 : \xi < \alpha\}$,*
(5) *Los elementos de ω_1 se llaman ordinales numerables,*
(6) *El orden de ω_1 es: $\alpha < \beta$ si $\alpha \in \beta$,*
(7) *ω_1 tiene elementos que no tienen predecesor inmediato, ellos se llaman ordinales límite,*
(8) *ω_1 tiene elementos que son el sucesor inmediato de otro, así $\xi + 1$ es el ordinal sucesor de ξ,*
(9) *Todo subconjunto numerable $A \subset \omega_1$ está acotado superiormente,*
(10) *Todo subconjunto numerable $A \subset \omega_1$ tiene un supremo en ω_1; o sea,* $\sup A \in \omega_1$.

1.4. Otros resultados importantes

En esta sección se concentra información que será relevante para algunas partes del texto. Se omiten todas las demostraciones y simplemente se indica al lector que pueden ser consultadas en [HH] y en [M].

Sin duda el lector ya estará muy familiarizado con las demostraciones hechas a partir del popular Principio de Inducción y el Principio de Recursión, sobre el conjunto de los números naturales. En el texto, para desarrollar algunos ejemplos se empleará también inducción y recursión transfinita.

El principio de inducción transfinita es como sigue. Dados un conjunto bien ordenado W y una afirmación $\Phi(w)$ que tiene a $w \in W$ como parámetro (y posiblemente otros); si para cualquier $w \in W$, suponer que $\Phi(v)$ es cierta para todo $v < w$, implica que $\Phi(w)$ es cierta, entonces $\Phi(w)$ es cierta para todo $w \in W$. Esta es la versión general del principio, obsérvese que es la generalización obvia del mismo principio cuando W es el conjunto de los números naturales. En el texto, muchas demostraciones usan inducción finita y algunas inducción sobre ω_1. Para este último caso el principio de inducción puede reformularse como sigue: Si $\Phi(\alpha)$ es una afirmación tal que

- $\Phi(0)$ es cierta,
- Para cada $\alpha < \omega_1$, $\Phi(\alpha)$ implica que $\Phi(\alpha + 1)$,
- Para cada $\alpha < \omega_1$, si α es un ordinal límite y $\Phi(\xi)$ es cierta para todo $\xi < \alpha$, entonces $\Phi(\alpha)$ es cierta;

entonces $\Phi(\alpha)$ es cierta para todo $\alpha < \omega_1$.

No es extraño que se confunda a la inducción con la recursión. A diferencia de la inducción, que es un método de demostración, la recursión se emplea para hacer construcciones y definiciones. Aquí se presenta una versión simplificada del Teorema de Recursión apropiado para los fines que se siguen en este texto.

Sean X un conjunto, $x_0 \in X$ y supóngase que $\mathscr{F}$ es el conjunto de todas las funciones con dominio algún segmento inicial de ω_1 y rango contenido en X. Si $G : \mathscr{F} \to X$ y $g : X \to X$ son funciones, entonces hay una única función $f : \omega_1 \to X$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$ se tiene que

- $f(0) = x_0$,
- Para cada $\alpha < \omega_1$, se cumple que $f(\alpha + 1) = g(f(\alpha))$ y
- Para cada $\alpha < \omega_1$, si α es un ordinal límite, entonces se cumple que $f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)$.

Las funciones g y G son las que proveen las instrucciones de cómo “ir construyendo” a la función f.

Un teorema importante de G. Cantor es el que caracteriza a $\mathbb{Q}$ en términos de su orden. Desgraciadamente es un teorema poco valorado a pesar de sus profundas consecuencias tanto en la matemática elemental como en áreas más especializadas.

TEOREMA 1.6 (Cantor). *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con su orden usual es el único (salvo isomorfismo de orden) conjunto que es: numerable, sin máximo, sin mínimo y es denso en sí mismo; es decir, entre dos cualesquiera de sus elementos se encuentran una infinidad de elementos.*

Un espacio topológico X es *Hausdorff* si para cualesquiera par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$. Un espacio topológico X es *normal* si X es un espacio Hausdorff y para cualesquiera par de subconjuntos cerrados ajenos A y B, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Todos los espacios metrizables son espacios normales. Dos resultados fundamentales en topología general son los siguientes.

TEOREMA 1.7 (Lema de Urysohn). *Un espacio topológico X que es Hausdorff es un espacio normal si y sólo si para cada par de subconjuntos cerrados y ajenos (no vacíos) A y B, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[A] = \{0\}$ y $f[B] = \{1\}$.*

TEOREMA 1.8 (Extensión de Tietze). *Un espacio topológico X que es Hausdorff es un espacio normal si y sólo si para todo subconjunto cerrado F de X y toda función continua $f : F \to [0,1]$ existe una función continua $\widetilde{f} : X \to [0,1]$ tal que $\widetilde{f} \restriction F = f$.*

El Lema de Urysohn permite definir una clase de espacios topológicos considerablemente más amplia que la clase de los espacios normales. Un espacio topológico X se llama *completamente regular* si cada punto forma un conjunto cerrado y para cada subconjunto cerrado $F \subseteq X$ y cada $x \in X \setminus F$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[F] = \{0\}$ y $f(x) = 1$. Por lo general, los espacios topológicos que son considerados en la práctica son espacios completamente regulares.

Un espacio topológico Hausdorff X es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ y cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ existe un subconjunto abierto V que contiene a x y tal que $\overline{V}$ es un subconjunto compacto contenido en U. Lo anterior es equivalente a que cada punto del espacio tenga una vecindad compacta. Puede demostrarse con cierta facilidad que todo espacio Hausdorff localmente compacto es un espacio completamente regular.

PROPOSICIÓN 1.9. *Si X es un espacio Hausdorff y localmente compacto, K es un subconjunto compacto, U es un subconjunto abierto y $K \subseteq U$,* *entonces existe una función continua* $h : X \to [0,1]$ *tal que* $h[X \setminus U] = \{0\}$ *y* $h[K] = \{1\}$.

Un resultado más que conviene tener presente es el más famoso teorema de metrización.

TEOREMA 1.10 (Urysohn). *Todo espacio completamente regular con una base numerable para su topología es metrizable.*

En particular, el llamado *cubo de Hilbert* $[0,1]^\omega$ es un espacio metrizable y de hecho se demuestra que cualquier espacio completamente regular y segundo numerable es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.

Ejercicios

(1) Muestre que la diferencia simétrica tiene las siguientes propiedades:
  (a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
  (b) $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$.
  (c) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.
  (d) $(A_0 \cup A_1) \triangle (B_0 \cup B_1) \subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_1 \triangle B_1)$.
  (e) $(A_0 \cap A_1) \triangle (B_0 \cap B_1) \subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_1 \triangle B_1)$.
  (f) $(A_0 \setminus A_1) \triangle (B_0 \setminus B_1) \subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_1 \triangle B_1)$.

(2) Considere un conjunto X y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X que es cerrada bajo uniones finitas y diferencias. Demuestre que si $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, entonces existe una sucesión $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathcal{F}$ que satisface las siguientes propiedades:
  (a) Para cada $n \in \omega$, $B_n \subseteq A_n$.
  (b) Para cada $m, n \in \omega$, $m \neq n$ implica que $B_m \cap B_n = \emptyset$.
  (c) Para cada $m \in \omega$, $\bigcup \{B_n : n \in (m+1)\} = \bigcup \{A_n : n \in (m+1)\}$.

  Sugerencia: Defina $B_1 = A_1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n \setminus \bigcup \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$.

(3) Sean $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X y $A \subseteq X$. La familia $\mathcal{F}$ es ajena por pares si cualquier par de elementos diferentes son ajenos. También se tiene que $\mathcal{F}$ es una partición

de X si es ajena por pares y su unión es X. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si $A \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, entonces $A = \bigcup \{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$.

(b) Si $X = \bigcup \mathcal{F}$, entonces para cada $D \subseteq X$ se tiene que $D = \bigcup \{D \cap F : F \in \mathcal{F}\}$.

(c) Si $\mathcal{F}$ es una partición de X, entonces para cada $D \subseteq X$, $\mathcal{F} \restriction D = \{D \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ es una partición de D.

(4) Sea $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión acotada de números reales. Demuestre las siguientes proposiciones:

(a) $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$.

(b) $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

(c) $\liminf_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ hay una infinidad de índices n para los cuales $x_n < x + \epsilon$ y sólo un número finito de índices n para los cuales $x_n < x - \epsilon$.

(d) $\limsup_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ hay una infinidad de índices n para los cuales $x_n > x - \epsilon$ y sólo un número finito de índices n para los cuales $x_n > x + \epsilon$.

(e) La sucesión $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ es convergente si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

(5) Demuestre que si $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ y $\langle y_n : n \in \omega \rangle$ son sucesiones acotadas, entonces

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.\end{aligned}$$

Muestre que ninguno de los símbolos de desigualdad se puede reemplazar por el símbolo de igualdad.

(6) Si X es un conjunto y $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de subconjuntos de X, se definen el límite inferior y el límite superior de $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ como

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup \{\bigcap \{A_k : k \geq n\} : n \in \omega\} \quad \text{y}$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap \{\bigcup \{A_k : k \geq n\} : n \in \omega\},$$

respectivamente.

(a) Demuestre las siguientes afirmaciones:

(i) $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ si y sólo si existe $n(x) \in \omega$ tal que para cada $m \geq n(x)$, $x \in A_m$.
(ii) $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ si y sólo si existe una infinidad de $m \in \omega$ tales que $x \in A_m$.
(iii) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$.
(iv) Si para cada $n \in \omega$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ o bien para cada $n \in \omega$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, entonces $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(b) Si $X = \mathbb{R}$ y se define $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ como

$$A_n = \begin{cases} [0, 1 + \frac{1}{n+1}], & \text{si } n \text{ es par,} \\ [-1 - \frac{1}{n+1}, 0], & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

para cada $n \in \omega$, determine $\liminf_{n\to\infty} A_n$ y $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

(7) Dada una familia no vacía de conjuntos no vacíos $\{X_s : s \in S\}$ y $A \subseteq S$, se definen las proyecciones sobre la t-ésima coordenada, X_t, y sobre el subproducto $\prod_{s\in A} X_s$ como $\pi_s : \prod_{s\in S} X_s \to X_t$ y $\pi^S_A : \prod_{s\in S} X_s \to \prod_{s\in A} X_s$, respectivamente, como: $\pi_s(x) = x(s)$ y $\pi^S_A(x) = x \restriction A$, para cada $x \in \prod_{s\in S} X_s$.

Demuestre que si $A \subseteq B \subseteq S$; entonces $\pi^S_A = \pi^S_B \circ \pi^B_A$.

(8) Sea $(0, \omega_1) = \bigcup\{(\alpha_s, \beta_s) : s \in S\}$, donde cada $(\alpha_s, \beta_s) \subseteq (0, \omega_1)$. Demuestre que $|S| \geq \aleph_1$ y que existe $\beta < \omega_1$ que pertenece a al menos $\aleph_0$ intervalos (α_s, β_s).

(9) Considere el orden lexicográfico sobre 2^ω. Demuestre que el subconjunto de sucesiones en 2^ω eventualmente constantes es isomorfo a $\mathbb{Q}$.

(10) Si K_0 y K_1 son subconjuntos compactos y ajenos en un espacio Hausdorff, demuestre que existen subconjuntos abiertos y ajenos que contienen a dichos subconjuntos compactos.

(11) Demuestre que un espacio Hausdorff localmente compacto es un espacio completamente regular.

(12) Demuestre la Proposición 1.9.

Capítulo 2

Conjuntos medibles de Lebesgue

En este capítulo se introduce la familia de conjuntos medibles y se estudian las propiedades fundamentales de ellos. Se procede de manera cercana a como surgieron históricamente los conjuntos medibles según Lebesgue pues introducir primero los conjuntos medibles según Jordan hará ganar intuición y permitirá ver al concepto de conjunto medible de una manera más natural. Primero se trabaja en $\mathbb{R}^k$ aunque el estudiante puede pensar todo el tiempo que $k = 2$ para tener más idea geométrica de los conceptos presentados.

Después de introducir los medibles según Jordan en $\mathbb{R}^k$, ya no tiene sentido seguir cargando esa k todo el tiempo. Las discusiones se concentran en los conceptos para $\mathbb{R}$; luego se retoman las discusiones sobre $\mathbb{R}^k$ después de la introducción de las medidas producto.

2.1. Medibles según Jordan

Empezaremos por una pregunta fundamental: ¿Cómo medir conjuntos en $\mathbb{R}^k$? En $\mathbb{R}^k$ tenemos la noción natural de volumen para algunos subconjuntos y podemos usar esa idea para generalizar definiendo una *caja* en $\mathbb{R}^k$ como un conjunto de la forma $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k$, donde cada I_i es un intervalo en $\mathbb{R}$ de alguna de las siguiente formas: $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b) o bien $(a,b]$. Es muy natural definir el volumen de una caja como el producto de la longitud de los intervalos que la forman; es decir, si $B = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_k,b_k]$, entonces el volumen de B es

$$v(B) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_k - a_k).$$

Capítulo **3**

Integración

En este capítulo se introduce la integral de Lebesgue que para una amplia gama de funciones asocia un número real y que conserva las principales propiedades que tiene la popular integral de Riemann además de agregar otras importantes. La más importante es, quizás, su capacidad de funcionar adecuadamente con procesos de límites numerables.

3.1. Integración de funciones simples

La integral de Lebesgue sigue en cierto modo los pasos de la integral de Riemann al definirse primero para funciones muy sencillas y a partir de ello se llega a la integral de funciones más generales.

La integral de Riemann empieza por ser naturalmente definida sobre funciones escalón, aquí el "análogo" son las funciones características. Recuerde que para $A \subseteq \mathbb{R}$ se define

$$\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la *función característica* de A por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 3.1. Una *función simple* es una función de la forma

$$f = c_0\chi_{E_0} + c_1\chi_{E_1} + \cdots + c_n\chi_{E_n},$$

donde $n \in \omega$, $c_i \in \overline{\mathbb{R}}$ y $E_i \in \mathfrak{M}$ para cada $i \leq n$.

La familia de todas las funciones simples será denotada por Simp.

Puede observarse con facilidad que Simp es un álgebra de funciones; es decir, es un anillo con estructura vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se denotará por Simp^+ a la colección de funciones simples no negativas, $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$.

La representación de una función simple como $f = \sum_{i \leq n} c_i \chi_{E_i}$ no es única, pero entre las representaciones para f hay una única representación estándar en la que los escalares c_i son distintos y los conjuntos E_i son ajenos, no vacíos y son tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{i \leq n} E_i$. Cuando se trate con funciones simples siempre se asumirá que se está usando su representación estándar como anteriormente fue expresado, a menos que se indique explícitamente que se está usando algo diferente.

Definición 3.2. Si $f \in \mathsf{Simp}^+$ con $f = \sum_{i \leq n} c_i \chi_{E_i}$, en su representación estándar, se define la *integral de Lebesgue* de f como

$$\int f \; d\mu = \sum_{i \leq n} c_i \cdot \mu(E_i).$$

Recuerde que el *soporte* de una función $f : X \to \mathbb{R}$ es el conjunto

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Asimismo, se dirá que una proposición es cierta *casi por doquier* (según μ) si es cierta en todo punto del conjunto $\mathbb{R} \setminus M$, para algún conjunto M de μ-medida cero.

Proposición 3.3. *Si f y g son funciones simples no negativas, entonces*

(1) $\int f + g \; d\mu = \int f \; d\mu + \int g \; d\mu$,
(2) $\int cf \; d\mu = c \int f \; d\mu$, *para* $c \in [0, +\infty]$,
(3) $\int f \; d\mu < +\infty$ *si y sólo si* $\mu(\operatorname{supp}(f)) < +\infty$ *y* f *es finita casi por doquier,*
(4) $\int f \; d\mu = 0$ *si y sólo si* $f \equiv 0$ *casi por doquier,*
(5) $f = g$ *casi por doquier, entonces* $\int f \; d\mu = \int g \; d\mu$,
(6) $f \leq g$ *casi por doquier implica que* $\int f \; d\mu \leq \int g \; d\mu$,
(7) $\int \chi_E \; d\mu = \mu(E)$.

La demostración de esta proposición es casi inmediata a partir de la definición y se prefiere que el lector la piense un poco, casi por doquier.

Definición 3.4. Una función simple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *integrable* si

$$\int |f| \; d\mu < +\infty.$$

Capítulo 4

Medidas abstractas

Como ya se ha discutido antes, la teoría de la medida nació como teoría de la integración primero para funciones de variable real y después para $\mathbb{R}^n$. Fue hasta que Radon y Fréchet dieron el paso final al definir medidas de manera abstracta; así hoy se tiene esta generalidad que es tan útil en muchas aplicaciones como la moderna Teoría de la Probabilidad que a menudo requiere de integración sobre espacios abstractos de dimensiones infinitas y obviamente no localmente compactos como los $\mathbb{R}^n$.

4.1. σ-álgebras

DEFINICIÓN 4.1. Sea X un conjunto (preferentemente no vacío). Una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X se llama *σ-álgebra* si

- $\emptyset \in \mathscr{A}$,
- Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathscr{A}$,
- $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{A}$ implica $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathscr{A}$.

Al par $(X, \mathscr{A})$ se le llama *espacio medible*. A los elementos de $\mathscr{A}$ se les llama conjuntos $\mathscr{A}$-medibles.

Obsérvese que si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra y $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{A}$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathscr{A}$, al igual que $X \in \mathscr{A}$.

La σ se usa a menudo para "sumas numerables". El concepto de álgebra de conjuntos se obtiene al considerar sólo operaciones finitas.

EJEMPLO 4.2. La σ-álgebra trivial es $\{\emptyset, X\}$.

Ejemplo 4.3. La familia de subconjuntos elementales o co-elementales de $\mathbb{R}^n$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.

Ejemplo 4.4. Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son Jordan medibles o co-Jordan medibles, también es un álgebra pero no una σ-álgebra.

Ejemplo 4.5. $\mathfrak{M}$ sí es una σ-álgebra, ver Teorema 2.17.

Ejemplo 4.6. Si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre un conjunto X y $Y \subseteq X$, entonces la σ-álgebra restringida a Y es

$$\mathscr{A} \restriction Y = \{A \cap Y : A \in \mathscr{A}\}.$$

Ejemplo 4.7. $\mathscr{P}(X)$ es una σ-álgebra, llamada álgebra discreta.

Ejemplo 4.8. La familia de subconjuntos numerables o co-numerables de un conjunto X es una σ-álgebra.

Ejemplo 4.9. Si X es un conjunto y $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}(X)$, entonces la *$\sigma$-álgebra generada por $\mathcal{G}$* es

$$\mathscr{A}(\mathcal{G}) = \bigcap\{\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X) : \mathscr{A} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{G} \subseteq \mathscr{A}\}.$$

Note que $\mathscr{A}(\mathcal{G})$ es la $\subseteq$-mínima σ-álgebra sobre X que contiene a $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ es numerable, se dice que $\mathscr{A}(\mathcal{G})$ es *numerablemente generada*.

4.2. Los conjuntos borelianos

Podría decirse que en esta sección se continuará con los ejemplos dados al final de la sección anterior pero que el ejemplo que se presenta en esta sección es tan importante que reclama por sí solo una sección del presente capítulo.

Proposición 4.10. *Sean X un conjunto y $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{P}(X)$ no vacía. Si se define $\mathscr{G}_\alpha$ recursivamente, para $\alpha \leq \omega_1$, como sigue:*

- $\mathscr{G}_0 = \mathcal{G} \cup \{X \setminus G : G \in \mathcal{G}\}$,
- $\mathscr{G}_{\alpha+1} = \{\bigcup_{n\in\omega} G_n : (\forall n \in \omega)(G_n \in \mathscr{G}_\alpha)\} \cup \{X \setminus G : G \in \mathscr{G}_\alpha\}$,
- *Si $\alpha \leq \omega_1$ es ordinal límite; entonces $\mathscr{G}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathscr{G}_\xi$,*

entonces $\mathscr{G}_{\omega_1}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$.

Capítulo 5

El método de Carathéodory

Este capítulo será dedicado al método más importante de generación de medidas; dicho método fue sintetizado por Constantin Carathéodory quien obviamente tuvo ascendencia griega (sus padres) pero que nació en Alemania donde también recibió su formación matemática. Jan Mařík solía decir que un conjunto medible era un cuchillo muy afilado. Se va a explicar esto un poco más adelante. Se menciona aquí porque nos parece una manera muy efectiva de asociar un concepto cotidiano a un concepto especializado y extremadamente útil.

5.1. Medidas Exteriores

Definición 5.1. Dado un conjunto X, una *medida exterior* para X es una función $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ tal que:

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) \neq 0$,
(2) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, si $A \subseteq B \subseteq X$,
(3) $\mu^*(\bigcup_{n\in\omega} A_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu^*(A_n)$; es decir, μ^* es numerablemente subaditiva.

Ejemplo 5.2. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente y continua por la derecha, es posible definir

$$\mu_g^*([a, b]) = g(b) - g(a),$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ y para $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mu_g^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\omega} \mu_g^*([a_n, b_n]) : A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (a_n, b_n)\}.$$

Esta se conoce como la *medida exterior de Lebesgue-Stieljes*.

EJEMPLO 5.3. Defina $\upsilon^* : \mathscr{P}(\omega) \to [0, +\infty]$ por $\upsilon^*(A) = \sum_{a\in A} {}^1\!/_a$, para cada $A \subseteq \omega$. Entonces υ^* es una medida exterior.

Estos ejemplos muestran que definir medidas exteriores no es una tarea tan difícil.

DEFINICIÓN 5.4. Dada una medida exterior μ^* para X, un subconjunto $E \subseteq X$ se llama *medible según Carathédory*, con respecto a μ^*, si para cualquier $A \subseteq X$ se tiene que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Esta es la razón por la que Jan Mařík antes se refirió a los conjuntos medibles como cuchillos muy afilados que cortan a cada conjunto de una manera aditiva[1]; la analogía es clara: a cualquier otro conjunto lo parte bien. Es un misterio cómo fue que Carathéodory llegó a esa idea que es nada intuitiva.

TEOREMA 5.5 (Carathéodory). *Para toda medida exterior μ^* definida sobre un conjunto X, existe una σ-álgebra $\mathscr{A}^*$ y una medida numerablemente aditiva μ sobre $\mathscr{A}^*$, de modo que $E \in \mathscr{A}^*$ si y sólo si E es medible según Carathéodory respecto a μ^* y $\mu(E) = \mu^*(E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Defina $\mathscr{A}^*$ por $E \in \mathscr{A}^*$ si y sólo si E es medible según Carathéodory. Es fácil ver que $\emptyset \in \mathscr{A}^*$, $X \in \mathscr{A}^*$ y que si $E \in \mathscr{A}^*$, entonces $X \setminus E \in \mathscr{A}^*$.

Se afirma que $\mathscr{A}^*$ es cerrada bajo intersecciones finitas. En efecto, sean $E, F \in \mathscr{A}^*$ y sea $A \subseteq X$. Se requiere establecer que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cap F)) + \mu^*(A \setminus (E \cap F)).$$

Póngase primero $B = A \setminus (E \cap F)$. Como $E \in \mathscr{A}^*$, se tiene que

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E) = \mu^*((A \cap E) \setminus F) + \mu^*(A \setminus E).$$

También como $F \in \mathscr{A}^*$, se tiene que

$$\mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \setminus F)$$

[1]Tomado de *Measure and Topology: Mařík spaces. Iván Netuka. Mathematica Bohemica 121 (1996) 357-367.*

Capítulo 6

Medidas Producto

Este capítulo tiene un objetivo claro, extender a más dimensiones lo hasta ahora expuesto. Es decir, que dada una familia de espacios con medida, una manera obvia de combinar esos espacios con medida es definir una medida en el producto cartesiano que esté íntimamente relacionada con las medidas de los espacios factores.

6.1. Producto de dos factores

Empezaremos la tarea de definir la medida producto primero para el caso de dos factores, que fácilmente se debe generalizar al producto de una cantidad finita de factores.

Definición 6.1. Sean $(X, \mathscr{A}_X, \mu)$ y $(Y, \mathscr{A}_Y, \nu)$ dos espacios con medida. Se llamará *rectángulos* a los conjuntos de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathscr{A}_X$ y $B \in \mathscr{A}_Y$.

El siguiente lema puede establecerse sin dificultad si se tiene en cuenta que $\mathscr{A}_X$ y $\mathscr{A}_Y$ son σ-álgebras.

Lema 6.2. *Si $(X, \mathscr{A}_X, \mu)$ y $(Y, \mathscr{A}_Y, \nu)$ son dos espacios con medida, la familia $\mathscr{R}$ de todas las uniones finitas de rectángulos es un álgebra de conjuntos.*

Es un ejercicio demostrar que cada elemento de $\mathscr{R}$ puede expresarse como unión ajena finita de rectángulos.

La σ-álgebra producto debería ser tal que al menos los rectángulos resulten conjuntos medibles; además, tal como pasa con la topología producto (sin duda más popular), los rectángulos deben ser los conjuntos medibles básicos para el espacio producto.

DEFINICIÓN 6.3. Sean $(X, \mathscr{A}_X, \mu)$ y $(Y, \mathscr{A}_Y, \nu)$ dos espacios con medida. Sea $Z = X \times Y$. La σ-álgebra producto $\mathscr{A}_Z$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathscr{R}$.

Naturalmente esto proporciona la posibilidad de tener una σ-álgebra producto sobre todos los espacios euclidianos $\mathbb{R}^k$ si para cada factor se considera la σ-álgebra de Lebesgue. Esta σ-álgebra, sin embargo, no es la misma que la σ-álgebra de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^k$ que se definió en el primer ejemplo de la Sección 5.3. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, si $X \subseteq [0,1]$ es un conjunto de Vitali (no medible), entonces $X \times \{0\}$ pertenece a la σ-álgebra de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^2$, según la definición de la Sección 5.3 pero no pertenece a la σ-álgebra producto. Se deja al lector demostrar que la completación de la σ-álgebra producto es la σ-álgebra de Lebesgue. Esto remedia la discrepancia. Ver los Ejercicios 3 y 4.

Una vez definida la σ-álgebra producto se debe pasar a establecer la existencia de una medida producto.

TEOREMA 6.4. *Si $(X, \mathscr{A}_X, \mu)$ y $(Y, \mathscr{A}_Y, \nu)$ son dos espacios con medida, $Z = X \times Y$ y $\mathscr{A}_Z$ es la σ-álgebra producto, entonces existe una medida ϱ sobre $\mathscr{A}_Z$ que tiene la propiedad de que*

$$\varrho(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B),$$

para todo $A \in \mathscr{A}_X$ y todo $B \in \mathscr{A}_Y$. Si además los espacios son σ-finitos, entonces la medida ϱ es única.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que el rectángulo $A \times B$ es la unión de una familia ajena, por pares, de rectángulos $\{A_n \times B_n : n \in \omega\}$, es decir que $A \times B = \bigcup_{n\in\omega} A_n \times B_n$. Así,

$$\chi_{A\times B}(x,y) = \sum_{n\in\omega} \chi_{A_n}(x) \cdot \chi_{B_n}(y)$$

para cualquier $\langle x, y\rangle \in Z$. Entonces, al fijar x y aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona para integrar con respecto a y se tiene que

$$\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum_{n\in\omega} \chi_{A_n}(x)\nu(B_n)$$

Capítulo 7

Cuatro importantes teoremas

Este capítulo está dedicado a cuatro resultados independientes entre sí. El primero establece una íntima relación entre los funcionales lineales no negativos definidos en el espacio vectorial de las funciones con soporte compacto y valores reales definidas sobre un espacio Hausdorff y localmente compacto. Muestra la potencia de los métodos de medida al ser capaces de representar dichos funcionales como medidas sobre el espacio, también da la posibilidad de definir multitud de medidas sobre un espacio dado. En la segunda sección se presenta un resultado que relaciona dos medidas sobre un espacio mediante la integral de una función, la "derivada" de una medida respecto de la otra. La tercera sección es de naturaleza diferente pues expone un resultado que en cierto modo dice que la concentración de un conjunto medible alrededor de un punto es total o rala, muy escasa. El último de los resultados que se presentan es una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo, pues establece que la integral de Lebesgue es derivable y que su derivada es la esperada.

7.1. Teorema de Representación de Riesz

Esta sección está dedicada a uno de los resultados más famosos e importantes del análisis moderno. Durante toda la sección, X será un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto, $C(X)$ representará el conjunto de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ mientras que $C^+(X)$ es el conjunto de todas las $f \in C(X)$ tales que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in X$. Otro conjunto de funciones que se empleará es $C_c(X)$, las funciones con soporte compacto; es decir, $f \in C(X)$ tiene soporte compacto si existe un subconjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus K$. De modo análogo se define $C_c^+(X)$. Naturalmente los conjuntos $C(X)$ y $C_c(X)$ tienen estructura vectorial sobre $\mathbb{R}$. El Teorema de Representación de Riesz asegura que los funcionales lineales no negativos definidos en $C_c(X)$ pueden representarse como una integral; un resultado sorprendente y muy útil sin duda.

Definición 7.1. Sea X un espacio Hausdorff y localmente compacto. Una función $\varphi : C_c(X) \to \mathbb{R}$ se llama *funcional lineal no negativo* si para cualesquiera $f, g \in C_c(X)$ y $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

(1) $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$,
(2) $\varphi(af) = a\,\varphi(f)$,
(3) $f \in C_c^+(X) \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.

El concepto de funcional lineal no negativo no está ligado al hecho de que su dominio sea $C_c(X)$ pues puede definirse sin cambios para cualquier espacio vectorial en el que hay una noción de no negatividad. Cuando su dominio es $C_c(X)$ se les llama también *medidas de Radon*. Hay multitud de ejemplos de medias de Radon, por ejemplo, la integral de Lebesgue para funciones en los $\mathbb{R}^k$ o para un espacio topológico X Hausdorff y localmente compacto, la evaluación en un punto $p \in X$, $e_p(f) = f(p)$, es un funcional lineal que en este caso es multiplicativo porque $e_p(fg) = e_p(f)\, e_p(g)$, para cualesquiera $f, g \in C(X)$.

A cada funcional lineal no negativo se asociará una medida usando el método de Carathéodory que se expuso en el Capítulo 5. Se necesitará entonces una medida exterior y para ello, se empieza por definir

$$\mu_\varphi(C) = \inf\{\varphi(f) : f \in C_c(X) \wedge \chi_C \leq f\};$$

donde $C \subseteq X$ es compacto y donde $\chi_C \leq f$ obviamente significa que $\chi_C(x) \leq f(x)$ para cada $x \in X$. Esta definición de μ_φ está correctamente hecha puesto que se está suponiendo que el espacio X es Hausdorff y localmente compacto, por lo tanto, es completamente regular. Dado un conjunto compacto $C \subseteq X$, es posible cubrir a C con una familia finita de vecindades con cerradura compacta; si U es la unión de dichas vecindades se tendrá que $C \subseteq U$ y que $\overline{U}$ es compacto. Entonces es posible hallar una función $f \in C_c(X)$ tal que $f[C] \subseteq \{1\}$ y $f[X \setminus U] \subseteq \{0\}$ por la regularidad completa del espacio. Obsérvese que se garantiza fácil que f tenga soporte compacto.

Capítulo 8

El Teorema de Isomorfismo de Borel

Este capítulo está dedicado a presentar el Teorema de Kuratowski sobre la clasificación de espacios medibles con la σ-álgebra de Borel. Se empieza por presentar algunas de las propiedades más relevantes de espacios polacos, después se presentan algunos hechos importantes sobre espacios estándar de Borel y en la tercera sección se completa la demostración del teorema. No sólo se presentan los elementos necesarios para la demostración sino que se ha decidido incluir algunos resultados de interés propio y que dan muestra del tipo de razonamientos y las técnicas empleadas en esta área de la teoría.

En la Sección 4.2 se introdujo una de las σ-álgebras más importantes: la σ-álgebra de Borel; es decir, la σ-álgebra $\mathscr{B}(X)$ generada por los conjuntos abiertos de un espacio topológico X. Se presentó de manera somera la jerarquía de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, entre otras cosas. En el presente capítulo se estudiará más la clase de los espacios de Borel.

8.1. Espacios polacos

Con seguridad el lector ya habrá tenido oportunidad de convivir con esta clase de espacios aunque posiblemente la terminología sea nueva.

Definición 8.1. Un espacio topológico X es un *espacio polaco*, si es separable y completamente metrizable.

Recuerde que una sucesión en un espacio métrico (X, d), $\langle x_n : n \in \omega\rangle$, es una *sucesión de Cauchy* si $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$; y que el espacio se llama *completo* si cada sucesión de Cauchy en X tiene un límite en X. También recuerde que cada espacio métrico tiene una completación $(\widehat{X}, \widehat{d})$; o sea, un espacio métrico completo en el que X es un subespacio denso. La completación de un espacio métrico es única, salvo isometría. Un espacio topológico X es *completamente metrizable* si admite una métrica completa d compatible con su topología; es decir, que la genere y de modo que (X, d) sea completo.

Otro hecho que es fundamental recordar es que un espacio topológico es *separable* si contiene un subconjunto denso numerable. Esta propiedad, en el caso de espacios métricos, es equivalente a tener una base numerable para su topología. Otra propiedad equivalente es que de toda cubierta abierta del espacio es posible encontrar una subcubierta numerable; es decir, la propiedad de Lindelöf. Estas propiedades son equivalentes sólo en el caso de espacios metrizables.

Algunas afirmaciones que no son muy difíciles de verificar (ver [M]) es que la completación de un espacio métrico separable es un espacio polaco, que un subespacio cerrado de un espacio polaco es un espacio polaco y que el producto a lo más numerable de espacios polacos es un espacio polaco. Así, algunos ejemplos de espacios polacos son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^\omega$, $\mathbb{N}^\omega$, 2^ω $[0,1]$, etc. También es un teorema importante el hecho de que todo subespacio G_δ de un espacio polaco es un espacio polaco. Como consecuencia inmediata se obtiene que $(0,1)$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ también son espacios polacos. Este resultado se establece a continuación después de unos resultados previos.

Lema 8.2 (Kuratowski). *Si $f : A \to Y$ es una función continua de un subconjunto A de un espacio metrizable X a un espacio completamente metrizable Y, entonces f se puede extender continuamente a un conjunto G_δ que contiene a A.*

Demostración. Use una métrica d que sea completa, acotada y compatible con la topología de Y. Para cada $x \in \overline{A}$, considere la *oscilación* de f en x; o sea,

$$osc(f, x) = \inf\{\text{diametro}(f[A \cap V]) : (x \in V) \wedge (V \text{ es abierto})\}.$$

Observe que f es continua en un punto x si y sólo si $osc(f, x) = 0$.

Bibliografía

[A] Tom M. Apostol. *Calculus.* Volume 1, Second Edition. John Willey & Sons, 1967.

[As] Jesús A. Astorga Moreno. *Medidas Tipo Lebesgue.* Tesis de Maestría. Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, UNAM-UMSNH, 2013.

[AG] Jesús A. Astorga-Moreno, Salvador García-Ferreira. *Outer Measures on the real line by weak selections.* Real Analysis Exchange **39**(1) 2013/2014, 101-116.

[B] Robert G. Bartle. *The elements of integration.* John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966.

[BJ] Tomek Bartoszyński, Haim Judah. *Set Theory, on the structure of the real line.* A K Peters, Ltd. Wellesley MA, 1995

[CJ] Richard Courant, Fritz John. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático.* Limusa, 1978.

[D] Jean Dieudonné. *History of Functional Analysis.* North-Holland. Amsterdam, 1981.

[E] Ryszard Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag. Berlin, 1989.

[F] Claude-Alain Faure. *A short proof of Lebesgue's density theorem.* Amer. Math, Monthly, **109-2**. 2002. 194-196.

[Fr] David H. Fremlin. *Measure theory. Vol. 1. The irreducible minimum.* Torres Fremlin, Colchester, 2004.

[H] Paul R. Halmos. *Measure Theory.* D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.

[HH] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos, una introducción.* Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos, Vol. 13, 2003.

[HS] Edwin Hewitt, Karl Stromberg. *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable.* Third printing. Graduate Texts in Mathematics, No. 25. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[K] Kenneth Kunen. *Set Theory.* College Publications, 2011.

[Ke] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics, No. 156. Springer Verlag, 1995.

[MB] Edward J. McShane, Truman A. Botts. *Análisis Real.* Aguilar, 1971.

[M] James R. Munkres. *Topology: a first course.* Prentice Hall. New Jersey, 1975.

[O] John C. Oxtoby. *Measure and Category.* Second Ed. Graduate Texts in Mathematics, No. 2. Springer-Verlag, New York, 1980.

[R] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 1953.

[S] Stanisław Saks. *Theory of the Integral.* Hafner Publishing Company. New York, 1933.

[Si] Maurice Sion. *History of measure theory in the twentieth century.* Notes. http://www.math.ubc.ca/ marcus/Math507420/Math507420hist.pdf

[Sr] Sahi M. Srivastava. *A Course on Borel Sets.* Springer, Graduate Text in Mathematics, 180. New York, 1998.

[T] Terence Tao. *An Introduction to Measure Theory.* Graduate Studies in Mathematics v. 126 American Mathematical Society, Providence, Thole Island, 2011.

Índice