

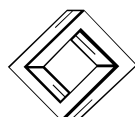
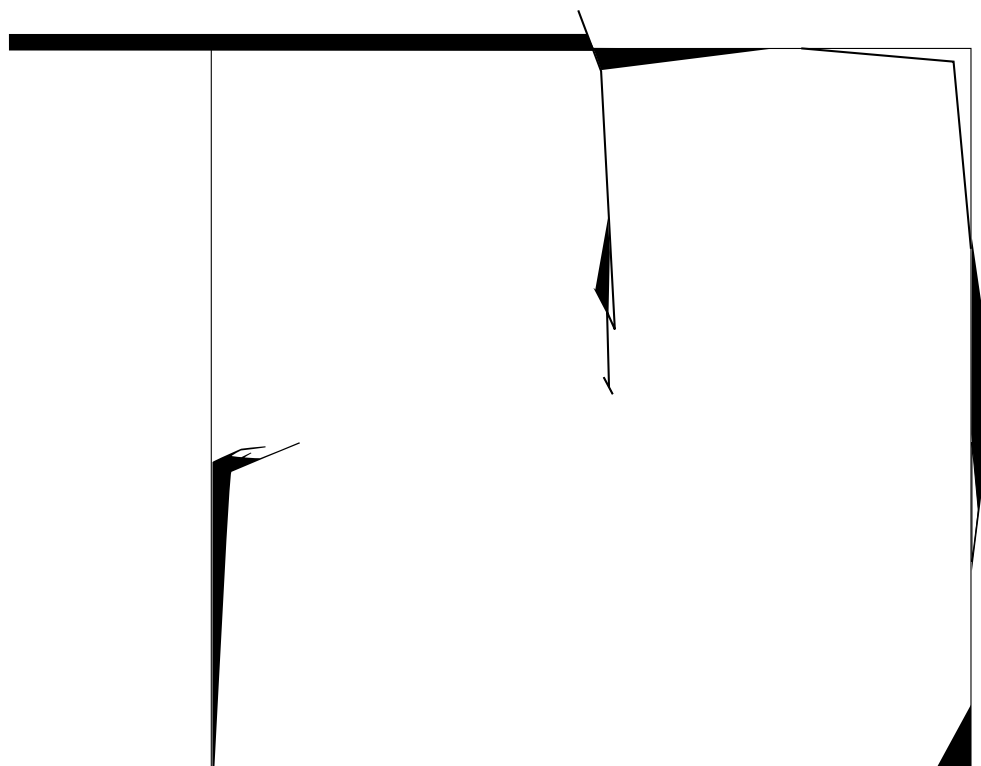
**APORTACIONES
MATEMÁTICAS**

TEXTOS **13**
NIVEL MEDIO

TEORÍA DE CONJUNTOS
Una introducción

FERNANDO HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

TERCERA EDICIÓN



Sociedad Matemática Mexicana



Instituto de
Matemáticas
UNAM

México D.F., 2011

Fernando Hernández Hernández

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

3a. Edición, 2011
2a. Edición, 2003
1a. Edición, 1998

Fecha de edición: 15 de abril de 2011

D.R. © 1998 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, Distrito
Federal.

ISBN: 978-968-36-3591-4 (Aportaciones Matemáticas)
ISBN: 978-968-36-3594-5 (Serie Textos)
ISBN: 978-607-02-2276-4

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización
escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en México.

Coedición:

Instituto de Matemáticas, UNAM
Av. Universidad 3000
04510 – México, D.F.

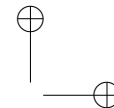
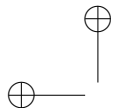
Sociedad Matemática Mexicana
Carretera México-Cuernavaca Km 23.5,
Av. Cipreses s/n, San Andrés Totoltepec,
14400 – México, D.F.

Este volumen se imprimió con el apoyo financiero de: la Sociedad Matemática Mexicana a través del fondo de Aportaciones Matemáticas, y el Instituto de Matemáticas, UNAM.

Contenido

Prefacio	xiii
Prefacio a la Primera Edición	xv
Capítulo 1. Introducción Histórica	1
Capítulo 2. Axiomas de la Teoría de Conjuntos	7
2.1. Propiedades	7
2.2. Los Axiomas	11
Capítulo 3. Álgebra de Conjuntos	25
3.1. Operaciones Fundamentales	25
3.2. Producto Cartesiano	31
3.3. Familias de Conjuntos	36
Capítulo 4. Relaciones y Funciones	45
4.1. Relaciones	45
4.2. Funciones	51
4.3. Productos Cartesianos Arbitrarios	66
4.4. Equivalencias y Particiones	72
4.5. Órdenes	80
4.6. Buenos órdenes	92
4.7. Sobre Clases	96
Capítulo 5. Los Números Naturales	99
5.1. Introducción	99
5.2. Propiedades de los Números Naturales	104
5.3. El Teorema de Recursión	110
5.4. Aritmética de los Números Naturales	116
Capítulo 6. La Extensión de los Naturales a los Reales	125
6.1. Diferencias	125
6.2. Los Enteros	128
6.3. Los Racionales	132
6.4. Sucesiones de Cauchy de Números Racionales	138
6.5. Los Reales	144
Capítulo 7. Cardinalidad	155
7.1. Introducción	155

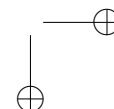
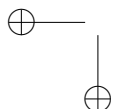
7.2.	Conjuntos Finitos	156
7.3.	Cardinalidad en Conjuntos Infinitos	160
7.4.	Conjuntos Numerables	162
7.5.	Números Cardinales	168
7.6.	Aritmética Cardinal	171
7.7.	El Continuo	176
Capítulo 8.	El Axioma de Elección	181
8.1.	Introducción	181
8.2.	El Axioma de Elección	184
8.3.	Cuatro Equivalencias Importantes	188
8.4.	Uso del Axioma de Elección	195
8.5.	El Teorema del Ideal Primo	207
8.6.	Otras Proposiciones Relacionadas.	218
8.7.	Matemáticas sin Elección.	222
Capítulo 9.	Ordinales	225
9.1.	Introducción	225
9.2.	Números Ordinales	227
9.3.	El Axioma de Reemplazo	231
9.4.	Inducción y Recursión Transfinita	236
9.5.	Aritmética Ordinal	241
9.6.	Ordinales Iniciales y Alephs	254
9.7.	Suma y Multiplicación de Alephs	260
Capítulo 10.	Teoría de Cardinales	265
10.1.	Números Cardinales y el Axioma de Elección	265
10.2.	Sumas y Productos Infinitos	270
10.3.	Cardinales Regulares y Singulares	276
10.4.	La Hipótesis Generalizada del Continuo	281
10.5.	La GCH y los Números Cardinales	285
10.6.	Medidas y Cardinales	291
10.7.	Cardinales Medibles	296
10.8.	Conjuntos Estacionarios	299
10.9.	Otros Cardinales Grandes	309
Capítulo 11.	Dos Tópicos Especiales	317
11.1.	El Problema de Souslin	317
11.2.	El Axioma de Martin	322
11.3.	Equivalencias del Axioma de Martin	333

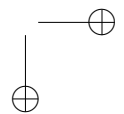
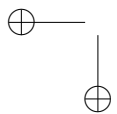
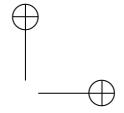
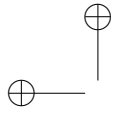


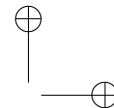
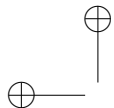
CONTENIDO

ix

Apéndice A. Axiomas de Zermelo-Fraenkel	339
Apéndice B. Axiomas Bernays-Gödel	341
Apéndice C. Axiomas Adicionales	343
Bibliografía	347
Índice	351





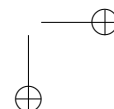
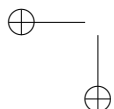


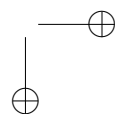
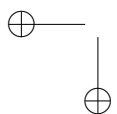
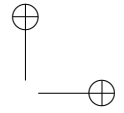
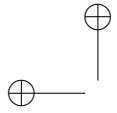
Teoría de Conjuntos

Cada cuerpo tiene
su armonía y
su desarmonía
en algunos casos
la suma de armonías
puede ser casi
empalagosa
en otros
el conjunto
de desarmonías
produce algo mejor
que la belleza

Mario Benedetti

Viento del Exilio





Prefacio

La primera versión de este libro la empecé a escribir cuando era estudiante de licenciatura, entonces mi concepción de lo que es la teoría de conjuntos era muy distinta a la que ahora tengo. Si de cero escribiera un libro ahora, seguramente diferiría mucho del texto que el lector tiene entre sus manos. Ahora me parece que las cosas se deberían hacer mucho más formales de como se presentan aquí. Sin embargo, al enfrentarme una vez más al reto de hacer un buen curso para estudiantes de licenciatura vuelvo a regresar a una idea muy similar a la que se plasmó en este texto hace más de 14 años.

En esta edición de *Teoría de Conjuntos (una introducción)* se han corregido algunos errores de ediciones anteriores, se dió un pequeño retoque a la Sección 2.1 sobre lo que llamamos propiedades; la Sección 4.5 se dividió en dos secciones, la primera que contiene la teoría estándar sobre conjuntos ordenados en general y la segunda que contiene material importante sobre uno de los conceptos fundamentales en la teoría, a saber, el de buen orden. Se consideró que antes este importante concepto estaba relegado al final de una larga sección y por ello se prefirió resaltar más su importancia dedicándole una sección. Otro de los conceptos fundamentales como es de conjuntos cerrados no acotados y conjuntos estacionarios no estaba tratado de manera apropiada. Esta edición contiene una nueva sección sobre estos conceptos. En dicha sección se trata el material estándar que todo interesado en profundizar en la teoría debe manejar; además contiene una demostración del poco conocido principio de anticipación para cerrados no acotados para cardinales regulares mayores a \aleph_1 de S. Shelah. Se agregaron también algunos ejercicios; me sorprendió darme cuenta de que el libro contiene más de 400 ejercicios de muy diversa dificultad. Se recomienda, una vez más, a los estudiantes intentar todos los ejercicios. Parte del entrenamiento que uno debe adquirir consiste en saber reconocer por uno mismo qué problemas uno será capaz de resolver y cuáles uno debe resolver con ayuda.

El libro ya ha sido usado como libro de texto en diversas universidades. Por comentarios de colegas y por la propia experiencia del autor se recomienda abarcar para un primer curso de un semestre parte de los primeros nueve capítulos. Aunque la cifra suena exagerada, el primer capítulo puede encargarse a los estudiantes como una lectura recreativa,

el tercer capítulo contiene material muy estándar que puede ser recordado rápidamente. El quinto capítulo es importante y considero que se deben exponer la mayor parte de las secciones, mientras que el sexto capítulo puede también presentarse ante el grupo de manera muy rápida. Las primeras tres secciones del Capítulo 8 deben ser presentadas pero, dependiendo del nivel de los estudiantes, el instructor debe valorar hasta qué punto de ese capítulo es adecuado para sus estudiantes. El Capítulo 9 es importante y puede tratarse de diferentes maneras; por ejemplo, puede omitirse la sección de aritmética ordinal y si así es el caso, puede incluso omitirse la demostración del Teorema de Recursión Transfinita. Si el tiempo lo permite, algunas secciones del Capítulo 10 son adecuadas para redondear lo visto antes.

Esta oportunidad debe ser aprovechada para agradecer a todos los lectores de ediciones anteriores de este texto, a los amigos que me han enseñado muchas cosas de Teoría de Conjuntos y a todas las personas que me han apoyado de una u otra manera.

Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán, Méx.

Marzo 2011

Prefacio a la Primera Edición

Casi todos los libros de matemáticas hablan de conjuntos y están libremente salpicados de extraños símbolos como \in , \subseteq , \cup , \cap , \emptyset . P. R. Halmos apunta en el ya clásico *Naive Set Theory*: “Los matemáticos están de acuerdo en que cada uno de ellos debe saber algo de Teoría de Conjuntos; el desacuerdo comienza al tratar de decidir qué tanto es *algo*. ” Hay motivos bien fundamentados detrás de esta obsesión por los conjuntos. La Teoría de Conjuntos es un lenguaje. Sin ella, no sólo es imposible hacer matemáticas, sino que ni siquiera podemos decir de qué se trata ésta. Es lo mismo que intentar estudiar literatura francesa sin saber algo de francés. Hewitt y Stromberg en su libro *Real and Abstract Analysis* dicen: “Desde el punto de vista de un lógico, las matemáticas son la Teoría de Conjuntos y sus consecuencias”.

La Teoría Intuitiva de Conjuntos funciona bien para los primeros cursos de matemáticas (Cálculo, Álgebra, entre otros), pero definitivamente para los cursos de matemáticas superiores es muy conveniente contar con una Teoría de Conjuntos sólida pues, de hecho, nociones como las de cardinalidad o aplicaciones del Axioma de Elección son fundamentales y, en ocasiones, indispensables en tópicos especializados del Análisis, Álgebra, Topología, etc.

En este texto se presenta la Teoría de Conjuntos basada en la Axiomática de Zermelo-Fraenkel con elección (**ZFC**) tratando de requerir el mínimo de formalismo lógico. Una justificación para optar por la axiomatización de Zermelo-Fraenkel (**ZF**) es que ésta es la más apropiada para un primer encuentro con la Teoría de Conjuntos y lo más importante es que, como veremos, los números reales, sus operaciones aritméticas y las demostraciones de sus propiedades pueden ser expresados a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Pero no sólo el sistema de los números reales encuentra sustento en la Axiomática de Zermelo-Fraenkel, la mayor parte de las matemáticas contemporáneas (posiblemente la única excepción es la Teoría de Categorías) puede desarrollarse dentro de la Teoría de Conjuntos así axiomatizada. Por ejemplo, los objetos fundamentales de Topología, Álgebra o Análisis (espacios topológicos, espacios vectoriales, grupos, anillos, espacios de Banach) son apropiadamente definidos como conjuntos de una clase específica.

Propiedades topológicas, algebraicas o analíticas de estos objetos son entonces derivadas a partir de las propiedades de conjuntos, las cuales se pueden obtener usando los axiomas **ZFC**. En este sentido, la Teoría de Conjuntos así axiomatizada sirve como una fundamentación satisfactoria para otras ramas de la matemática.

Una consulta rápida al contenido analítico será suficiente para enterarse de cuál es el material que se expone en este texto y cómo está organizado este material. Sin embargo, son convenientes algunos comentarios. En primer lugar, en el Capítulo 2, la noción de propiedad se da de manera intuitiva y se introducen los primeros axiomas del sistema **ZF**. En el Capítulo 6, la extensión de los números racionales a los números reales se hace estableciendo clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, en lugar del método clásico que utiliza cortaduras de Dedekind (que también se expone brevemente en el Capítulo 11). El Capítulo 8, que trata del Axioma de Elección, contiene mucha información, en especial, las Secciones 8.4 y 8.5 incluyen ejemplos que posiblemente no sean accesibles a todos los lectores; en particular, las demostraciones de éstos están destinadas a aquellos lectores con mayor conocimiento y madurez matemática. El propósito de incluir toda esta información es el de mostrar las vastas aplicaciones de dicho axioma en diversas áreas de la Matemática. La exposición del material dedicado a los números ordinales se pospone hasta después del Axioma de Elección por considerar a éste más importante, aunque por ello se sacrifique un poco el seguimiento de la exposición de los conceptos de cardinalidad; además de que es necesario dicho axioma en algunas proposiciones importantes que se refieren a números ordinales. El Capítulo 10 contiene tópicos especializados de Teoría de Cardinales y es deseable cubrir la mayor parte de él. Las dos últimas secciones de este capítulo requieren de los conceptos de ideales y filtros (para el caso especial del álgebra Booleana $\mathcal{P}(X)$) expuestos en la Sección 8.5. Por último, el Capítulo 11 puede considerarse optativo, el material que ahí se presenta es para aquellos lectores con mayor interés en la Teoría de Conjuntos o ramas afines como la Topología. Cabe mencionar que las secciones 11.2 y 11.3 están basadas en las notas de clase del curso sobre *forcing* que el Prof. Oleg G. Okunev impartió en la Facultad de Ciencias de la UNAM en el segundo semestre de 1997.

Por lo regular las secciones están seguidas de una lista de ejercicios. En pocas excepciones, los ejercicios no se refieren a los conceptos

tratados en el texto. Hay varios tipos de ejercicios, algunos rutinarios y otros más difíciles, los cuales frecuentemente están acompañados con sugerencias para su solución. Los ejemplos en el texto sólo ocasionalmente son desarrollados con todo detalle. La verificación de que un ejemplo tiene las propiedades deseadas se deja como ejercicio (usualmente fácil) para el lector.

El final de una demostración se indica con el símbolo \square . Las definiciones, observaciones, lemas, proposiciones y teoremas de cada capítulo son numerados consecutivamente por un par de números que indican el capítulo y el elemento respectivamente: ver Lema 3.2, significa ver el Lema 2 del Capítulo 3. Para hacer referencia a los ejercicios usaremos una terna de números separados por puntos: Ejercicio 2.3.7, significa ejercicio 7 de la sección 3 del capítulo 2. Los axiomas se numeran consecutivamente a lo largo de todo el texto.

Hay referencias de carácter histórico, pero como es un poco incómodo poner todos los datos de la obra que se esté citando en el lugar donde se realizan los apuntes, en la bibliografía se encuentran algunas segundas referencias. Por otra parte, me parece oportuno indicar la bibliografía básica empleada en la elaboración del material aquí presentado, la cual está integrada por: [E₁], [H₁], [HJ], [J₃], [K₁], [KM], [P₄], [P₅], [R₂], [S₁₀]. A los autores de estos textos es a quien ha de atribuirse lo acertado de las demostraciones presentadas. El mérito (si existe) de este trabajo es la selección, modo de presentación del material, modificación y adaptación de algunas de las demostraciones.

La idea de escribir el presente trabajo tuvo su origen en las notas “Breve Resumen de Introducción a la Teoría de Conjuntos”. En estas últimas se basó un seminario que realizamos algunos estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en 1992, el cual fue motivado por la falta de un curso de esta bella teoría. En los años en que han sido usadas las notas originales se observó que requerían de una revisión que las hiciera, hasta donde fuera posible, más entendibles y sobre todo más completas; así, el presente volumen difiere en mucho de las notas originales.

Es mi deseo que este libro sirva a cualquier interesado en las matemáticas; en especial a los estudiantes, para ayudarles a no sentirse confundidos (como en su momento yo lo estuve) por el concepto de conjunto.

Finalmente, y no por ello menos merecido, deseo manifestar mi sincero agradecimiento a todas las personas que de una u otra manera han colaborado en la realización de este libro y que por temor a aburrir al lector con una larga lista de nombres no citaré explícitamente. No obstante, es para mí un placer dar a conocer las personas que me ayudaron a culminar este trabajo y a quienes reitero mi agradecimiento: el Prof. Agustín Contreras Carreto, que pese a sus múltiples ocupaciones hizo un gran esfuerzo por brindarme su apreciable ayuda como el mejor de los amigos; el Prof. Fidel Casarrubias Segura, que me hizo observaciones muy acertadas sobre la manera en que se presentaba el material, que me estimuló en muchas ocasiones y que sobre todo me ha apoyado en tantos momentos difíciles; el Prof. Ángel Tamariz Mascarúa, cuya eficaz revisión mejoró notablemente la exposición del material aquí presentado y de quien he recibido además de un muy especial apoyo, su confianza. Los comentarios constructivos y críticas de todos ellos fueron muy apreciados; además de que han influido de manera sustancial en la redacción final de este trabajo. Expreso también mi gratitud a mi esposa quien ha sufrido y soportado mis locuras desde que inicié con aquel proyecto de 1992 y que para culminar este trabajo me respaldó a pesar de sentirse desplazada. A mis padres por todo el apoyo y comprensión que de ellos he recibido.

Fernando Hernández Hernández.