Teoría de Conjuntos

(una introducción)

Fernando Hernández Hernández

Contenido

Teor¶a de Conjuntos

Cada cuerpo tiene
su armon¶a y
su desarmon¶a

en algunos casos
la suma de armon¶as
puede ser casi
empalagosa

en otros
el conjunto
de desarmon¶as
produce algo mejor
que la belleza

Mario Benedetti

Viento del Exilio

Prefacio

Casi todos los libros de matemáticas hablan de conjuntos y están libremente salpicados de extraños símbolos como $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$. P. R. Halmos apunta en el ya clásico Naive Set Theory: “Los matemáticos están de acuerdo en que cada uno de ellos debe saber algo de Teoría de Conjuntos; el desacuerdo comienza al tratar de decidir qué tanto es algo”. Hay motivos bien fundamentados detrás de esta obsesión por los conjuntos. La Teoría de Conjuntos es un lenguaje. Sin ella, no sólo es imposible hacer matemáticas, sino que ni siquiera podemos decir de qué se trata ésta. Es lo mismo que intentar estudiar literatura francesa sin saber algo de francés. Hewitt y Stromberg en su libro Real and Abstract Analysis dicen: “Desde el punto de vista de un lógico, las matemáticas son la Teoría de Conjuntos y sus consecuencias”.

La Teoría Intuitiva de Conjuntos funciona bien para los primeros cursos de matemáticas (Cálculo, Álgebra, entre otros), pero definitivamente para los cursos de matemáticas superiores es muy conveniente contar con una Teoría de Conjuntos sólida pues, de hecho, nociones como las de cardinalidad o aplicaciones del Axioma de Elección son fundamentales y, en ocasiones, indispensables en tópicos especializados del Análisis, Álgebra, Topología, etc.

En este texto se presenta la Teoría de Conjuntos basada en la Axiomática de Zermelo-Fraenkel con elección (ZFC) tratando de requerir el mínimo de formalismo lógico. Una justificación para optar por la axiomatización de Zermelo-Fraenkel (ZF) es que ésta es la más apropiada para un primer encuentro con la Teoría de Conjuntos y lo más importante es que, como veremos, los números reales, sus operaciones aritméticas y las demostraciones de sus propiedades pueden ser expresados a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Pero no sólo el sistema de los números reales encuentra sustento en la Axiomática de Zermelo-Fraenkel, la mayor parte de las matemáticas contemporáneas (posiblemente la única excepción es la Teoría de Categorías) puede desarrollarse dentro de la Teoría de Conjuntos así axiomatizada. Por ejemplo, los objetos fundamentales de Topología, Álgebra o Análisis (espacios topológicos, espacios vectoriales, grupos, anillos, espacios de Banach) son apropiadamente definidos como conjuntos de una clase específica. Propiedades topológicas, algebraicas o analíticas de estos objetos son entonces derivadas a partir de las propiedades de conjuntos, las cuales se pueden obtener usando los axiomas ZFC. En este sentido, la Teoría de Conjuntos así axiomatizada sirve como una fundamentación satisfactoria para otras ramas de la matemática.

Una consulta rápida al contenido analítico será suficiente para enterarse de cuál es el material que se expone en este texto y cómo está organizado este material. Sin embargo, son convenientes algunos comentarios. En primer lugar, en el Capítulo 2, la noción de propiedad se da de manera intuitiva y se introducen los primeros axiomas del sistema ZF. En el Capítulo 6, la extensión de los números racionales a los números reales se hace estableciendo clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, en lugar del método clásico que utiliza cortaduras de Dedekind (que también se expone brevemente en el Capítulo 11). El Capítulo 8, que trata del Axioma de Elección, contiene mucha información, en especial, las Secciones 8.4 y 8.5 incluyen ejemplos que posiblemente no sean accesibles a todos los lectores; en particular, las demostraciones de éstos están destinadas a aquellos lectores con mayor conocimiento y madurez matemática. El propósito de incluir toda esta información es el de mostrar las vastas aplicaciones de dicho axioma en diversas áreas de la Matemática. La exposición del material dedicado a los números ordinales se pospone hasta después del Axioma de Elección por considerar a éste más importante, aunque por ello se sacrifique un poco el seguimiento de la exposición de los conceptos de cardinalidad; además de que es necesario dicho axioma en algunas proposiciones importantes que se refieren a números ordinales. El Capítulo 10 contiene tópicos especializados de Teoría de Cardinales y es deseable cubrir la mayor parte de él. Las dos últimas secciones de este capítulo requieren de los conceptos de ideales y filtros (para el caso especial del álgebra Booleana $\mathcal{P}(X)$) expuestos en la Sección 8.5. Por último, el Capítulo 11 puede considerarse optativo, el material que ahí se presenta es para aquellos lectores con mayor interés en la Teoría de Conjuntos o ramas afines como la Topología. Cabe mencionar que las secciones 11.2 y 11.3 están basadas en las notas de clase del curso sobre forcing que el Prof. Oleg G. Okunev impartió en la Facultad de Ciencias de la UNAM en el segundo semestre de 1997.

Por lo regular las secciones están seguidas de una lista de ejercicios. En pocas excepciones, los ejercicios no se refieren a los conceptos tratados en el texto. Hay varios tipos de ejercicios, algunos rutinarios y otros más difíciles, los cuales frecuentemente están acompañados con sugerencias para su solución. Los ejemplos en el texto sólo ocasionalmente son desarrollados con todo detalle. La verificación de que un ejemplo tiene las propiedades deseadas se deja como ejercicio (usualmente fácil) para el lector.

El final de una demostración se indica con el símbolo ■. Las definiciones, observaciones, lemas, proposiciones y teoremas de cada capítulo son numerados consecutivamente por un par de números que indican el capítulo y el elemento respectivamente: ver Lema 3.2, significa ver el Lema 2 del Capítulo 3. Para hacer referencia a los ejercicios usaremos una terna de números separados por puntos: Ejercicio 2.3.7, significa ejercicio 7 de la sección 3 del capítulo 2. Los axiomas se numeran consecutivamente a lo largo de todo el texto.

Hay referencias de carácter histórico, pero como es un poco incómodo poner todos los datos de la obra que se está citando en el lugar donde se realizan los apuntes, en la bibliografía se encuentran algunas segundas referencias. Por otra parte, me parece oportuno indicar la bibliografía básica empleada en la elaboración del material aquí presentado, la cual está integrada por: [E_1], [H_1], [HJ], [J_3], [K_1], [KM], [P_4], [P_5], [R_2], [S_{10}]. A los autores de estos textos es a quien ha de atribuirse lo acertado de las demostraciones presentadas. El mérito (si existe) de este trabajo es la selección, modo de presentación del material, modificación y adaptación de algunas de las demostraciones.

La idea de escribir el presente trabajo tuvo su origen en las notas "Breve Resumen de Introducción a la Teoría de Conjuntos". En estas últimas se basó un seminario que realizamos algunos estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en 1992, el cual fue motivado por la falta de un curso de esta bella teoría. En los años en que han sido usadas las notas originales se observó que requerían de una revisión que las hiciera, hasta donde fuera posible, más entendibles y sobre todo más completas; así, el presente volumen difiere en mucho de las notas originales.

Es mi deseo que este libro sirva a cualquier interesado en las matemáticas; en especial a los estudiantes, para ayudarles a no sentirse confundidos (como en su momento yo lo estuve) por el concepto de conjunto.

Finalmente, y no por ello menos merecido, deseo manifestar mi sincero agradecimiento a todas las personas que de una u otra manera han colaborado en la realización de este libro y que por temor a aburrir al lector con una larga lista de nombres no citaré explícitamente. No obstante, es para mi un placer dar a conocer las personas que me ayudaron a culminar este trabajo y a quienes reitero mi agradecimiento: el Prof. Agustín Contreras Carreto, que pese a sus múltiples ocupaciones hizo un gran esfuerzo por brindarme su apreciable ayuda como el mejor de los amigos; el Prof. Fidel Casarrubias Segura, que me hizo observaciones muy acertadas sobre la manera en que se presentaba el material, que me estimuló en muchas ocasiones y que sobre todo me ha apoyado en tantos momentos difíciles; el Prof. Ángel Tamariz Mascarúa, cuya eficaz revisión mejoró notablemente la exposición del material