8

El Axioma de Elección

8.1 Introducción

En este capítulo discutiremos un principio que es de los más importantes, y al mismo tiempo controversiales, de las matemáticas. En 1904 Ernst Zermelo en su “Demostración de que todo conjunto puede ser bien ordenado" [Z_1] puso atención a una suposición, la cual se usaba implícitamente en una variedad de argumentos matemáticos. Esta suposición no se deduce de los axiomas previamente conocidos de la matemática o de la lógica, por lo tanto, debe ser tomado como un nuevo axioma; Zermelo lo llamó Axioma de Elección. El Axioma de Elección es útil porque muchas proposiciones que parece natural suponer verdaderas, no podrían demostrarse sin su ayuda; además, tiene implicaciones significativas en muchas ramas de la matemática, y consecuencias tan poderosas que algunas veces son difíciles de aceptar; pero no siempre es indispensable, puesto que los temas en cuyo contexto se plantean dichas proposiciones continúan subsistiendo también en su ausencia, si bien en forma algo mutilada. La controversia sobre este principio continúa en nuestros días; presentaremos algunos de estos aspectos en este capítulo.

Para ilustrar cuándo el Axioma de Elección se introduce en los argumentos matemáticos examinaremos la siguiente proposición.

Proposición 8.1 Sea $(A, \leq)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado y supongamos que A no tiene elementos maximales, entonces existe una sucesión creciente $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ de elementos en A.

Demostración:

A es no vacío por hipótesis, por lo tanto, podemos seleccionar un elemento arbitrario de A y le llamaremos x_0. Por inducción, supóngase que tenemos dados $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$; definamos

$$A_n = \{x \in A : x > x_n\}.$$

A_n es no vacío, pues si fuera vacío, entonces x_n sería un elemento maximal, contradiciendo nuestro supuesto. Seleccionemos un elemento arbitrario de A_n

y llamémosle x_{n+1}; así tenemos

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}.$$

Este proceso inductivo define una sucesión creciente de longitud n, $S_n = (x_i)_{i=0}^{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si hacemos $S = \bigcup S_n$, entonces S es la sucesión que buscamos. ■

Un examen detallado del argumento anterior nos revelará que hemos usado una suposición que no es en sí misma evidente. En efecto, hemos supuesto que es posible hacer una sucesión infinita de elecciones. Es común, en matemáticas, hacer una elección arbitraria (por ejemplo, siempre decimos “sea x un elemento arbitrario de A”) y la experiencia confirma que podemos hacer una sucesión finita de elecciones; pero una sucesión infinita de elecciones nos lleva a repetir el argumento una cantidad infinita de veces, y nada en nuestra experiencia o en la lógica que habitualmente usamos justifica un proceso de esa naturaleza.

En la prueba de 8.1 fue necesario elegir elementos x_0, x_1, x_2, etc., en sucesión, donde cada elección depende de la elección anterior. El hecho de que las elecciones son sucesivas puede parecer el elemento más molesto en la demostración, puesto que esto involucra un factor de tiempo. Sin embargo, el argumento puede alterarse de tal modo que las elecciones se hagan simultáneamente e independientes unas de otras.

Admitamos que para cada subconjunto no vacío $B \subseteq A$, es posible seleccionar un elemento arbitrario f_B, que podemos llamar el representante de B. Note que en este caso, cada elección es independiente de las otras; ya que, en una manera de decirlo, todas las elecciones pueden hacerse simultáneamente. Regresando a la prueba de la Proposición 8.1, si x_n y A_n son dados, podemos definir x_{n+1} como el representante de A_n; en otras palabras, en lugar de seleccionar representantes de A_1, A_2, A_3, etc., en sucesión, tenemos seleccionados representantes de todos los subconjuntos no vacíos de A. De hecho, esto requiere hacer mucho más elecciones de las necesarias para nuestro argumento original, pero es el precio que debemos pagar para substituir las elecciones sucesivas por elecciones simultáneas.

El párrafo precedente hace ver que la naturaleza sucesiva de las elecciones no es el enigma del problema; el cuestionamiento es: ¿Podemos hacer infinitas elecciones?

Es fácil observar que en ciertos casos particulares la respuesta es “sí”. Por ejemplo, si A es un conjunto bien ordenado, podemos definir el representante de cada subconjunto no vacío $B \subseteq A$ como el elemento mínimo de B. La situación en la Proposición 8.1, sin embargo, es completamente diferente, porque no tenemos alguna regla definida que nos proporcione el representante.

En la demostración de la Proposición 8.1 hablamos de "seleccionar" un elemento de A_n; claramente, es deseable formalizar la noción de selección como un nuevo concepto de la Teoría de Conjuntos; la manera de realizarlo es introduciendo el concepto de función selectora de representantes.

Definición 8.2 Sea A un conjunto. Una función de elección o selectora para A es una función $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tal que, para todo

$$B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \quad f(B) = f_B \in B.$$

Ejemplo 8.3 Sea $A = \{a, b, c\}$. Una función de elección para A es la función dada por la siguiente tabla:

B	f_B
$\{a, b, c\}$	a
$\{a, b\}$	a
$\{a, c\}$	a
$\{b, c\}$	c
$\{a\}$	a
$\{b\}$	b
$\{c\}$	c

De hecho, cualquier conjunto finito tiene una función de elección (ver Ejercicio 8.2.1).

Ejemplo 8.4 Si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado entonces A tiene una función de elección.

En vista de la Definición 8.2, podemos reformular la pregunta planteada como: ¿Todo conjunto tiene una función de elección? Necesitamos hacer un comentario crucial en este punto: la demostración de la Proposición 8.1 no requiere que construyamos una función de elección, ésta requiere que exista al menos una función de elección para A, entonces (en el paso controversial de la demostración) definimos $x_{n+1} = f(A_{n+1})$; si estamos seguros de que f existe.

Axioma 9 (de Elección) Todo conjunto no vacío tiene una función de elección.

8.2 El Axioma de Elección

El Axioma de Elección difiere de los axiomas ZF (axiomas 1 a 8 y 10) por asegurar la existencia de un conjunto (es decir, una función de elección) sin describir a este conjunto como una colección de objetos que tienen una propiedad particular. Éste es precisamente el aspecto del Axioma de Elección que lo hace inaceptable para un grupo de matemáticos llamados intuicionistas, quienes afirman que la existencia matemática y la constructibilidad son la misma cosa. De hecho, es interesante saber cuándo una proposición matemática puede ser demostrada sin usar el Axioma de Elección.

Por otro lado, K. Gödel [G2] en 1938 probó que el Axioma de Elección es consistente con los axiomas ZF, es decir, no es contradictorio con ellos; tampoco es una consecuencia, como lo demostró P. J. Cohen [C4] en 1963. Así, este axioma tiene la misma categoría de otros axiomas famosos en matemáticas, como el Quinto Postulado de Euclides. Podemos tener entonces una Teoría de Conjuntos "estándar" ZFC si aceptamos el Axioma de Elección, y una Teoría de Conjuntos "no estándar" en la cual aceptemos postulados alternativos al Axioma de Elección.

Es imposible, por las razones del párrafo anterior, hacer una decisión en pro o en contra basada en argumentos de lógica pura acerca de la validez del Axioma de Elección. También, dado que el Axioma de Elección involucra un área de las matemáticas (a saber, los conjuntos infinitos) que está fuera de nuestra experiencia real, nunca será posible confirmar o rechazar al axioma por "observación"; así, la decisión es puramente personal.

En la literatura hay varias formulaciones diferentes del Axioma de Elección las cuales son equivalentes a nuestro Axioma 9. Aquí presentaremos seis de estas proposiciones, otras aparecerán en las siguientes secciones y en los ejercicios.

Teorema 8.5 Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) El Axioma de Elección.

(b) Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos, entonces existe un conjunto B tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \cap B$ es un conjunto unitario.

(c) Toda función sobreyectiva tiene una inversa derecha.

(d) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ es tal que $A_\alpha \neq \emptyset$, $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Gamma$ con $\alpha \neq \beta$, entonces existe $B \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ tal que $B \cap A_\alpha$ es unitario para cada $\alpha \in \Gamma$.

(e) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ es una familia indizada de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $f : \Gamma \to \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ tal que para cada $\alpha \in \Gamma$, $f(\alpha) \in A_\alpha$.

(f) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ es una familia indizada de conjuntos no vacíos entonces $\prod_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \neq \emptyset$.

(g) Si $F : X \to \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ es una función, entonces existe una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia no vacía cuyos elementos son no vacíos y ajenos por pares. Sea $A = \bigcup \mathcal{A}$; claramente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Por (a) existe una función $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tal que $f(C) \in C$ para cada $C \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Si $B = f(\mathcal{A})$, entonces B es el conjunto requerido por (b).

(b) $\Rightarrow$ (c). Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva, entonces $A_y = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ para cada $y \in Y$; además $y \neq y'$ implica que $A_y \cap A_{y'} = \emptyset$. Usando (b) se infiere la existencia de un conjunto B tal que $B \cap A_y$ es unitario para todo $y \in Y$. Sea $x_y \in X$ tal que $B \cap A_x = \{x_y\}$.

Definamos $g : Y \to X$ tal que $g(y) = x_y \in B \cap A_y$ para cada $y \in Y$. Es inmediato que g está bien definida y que $f(g(y)) = y$; o sea, $f \circ g = Id_Y$.

(c) $\Rightarrow$ (d). Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ tal que $A_\alpha \neq \emptyset$, $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ y definamos $f : \bigcup \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ como $f(x) = A_\alpha$ si $x \in A_\alpha$. Si $(x, A_\alpha) \in f$ y $(x, A_\beta) \in f$ entonces $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, luego $A_\alpha = A_\beta$. Por lo tanto, f es una función que claramente es sobreyectiva. Usando la hipótesis existe una función $g : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $f \circ g(A_\alpha) = Id_{\mathcal{A}}(A_\alpha) = A_\alpha$; lo cual implica que $g(A_\alpha) \in A_\alpha$. Tomando $B = g(\mathcal{A})$ se tiene la conclusión.

(d) $\Rightarrow$ (e). Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia indizada de conjuntos no vacíos. Entonces la familia $\mathcal{A} = \{\{\alpha\} \times A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ cumple las hipótesis requeridas por (d). Por lo tanto, existe un conjunto $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ tal que $B \cap (\{\alpha\} \times A_\alpha) = \{(\alpha, x_\alpha)\}$ para cada $\alpha \in \Gamma$; sea

$$f = \{(\alpha, x_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}.$$

Entonces f es una función de Γ en $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ y $f(\alpha) = x_\alpha \in A_\alpha$.

(e) $\Rightarrow$ (f). Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia indizada de conjuntos no vacíos, la función resultante de (e) de hecho es un elemento de $\prod_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$.

(f) $\Rightarrow$ (g). Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ y consideremos $A_x = F(x)$. La hipótesis implica que $\prod_{x \in X} A_x$ es no vacío, es decir, existe

$$f : X \to \bigcup_{x \in X} A_x$$

tal que $f(x) \in A_x = F(x)$. Pero $\bigcup_{x \in X} A_x \subseteq Y$, luego $f : X \to Y$ es la función requerida para establecer (g).

(g) $\Rightarrow$ (a). Consideremos la función identidad

$$Id : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

Entonces, por hipótesis, existe $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ tal que

$$f(A) \in Id(A) = A;$$

o sea, f es una función de elección para X. ■

Una implicación del Teorema 8.5 es que para cualquier relación de equivalencia en un conjunto X existe un conjunto de representantes para las clases de equivalencia. En los ejercicios se pide mostrar que la unión de una familia numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable; ésta es también una consecuencia del Axioma de Elección. Es importante mostrar que hay otras (muchas) formulaciones equivalentes del Axioma de Elección[1], las cuales tienen aplicación en muy diversas disciplinas matemáticas; en las próximas secciones daremos otras formulaciones, algunas aplicaciones y desventajas que uno sufre al dejar de aceptar el Axioma de Elección. Sierpiński fue uno de los primeros interesados en los problemas relacionados con el Axioma de Elección y desde 1918 publicó numerosos artículos relacionados a este tema.

Ejercicios 8.2

1. Demuestre que cualquier conjunto finito tiene una función de elección.

2. Pruebe que si $(A, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado y si $\mathcal{F}$ es cualquier familia de subconjuntos finitos no vacíos de A, entonces existe una función $f : \mathcal{F} \to A$ tal que $f(F) \in F$ para cada $F \in \mathcal{F}$. (De los axiomas ZF no se sigue que cualquier conjunto pueda ser linealmente ordenado.)

3. Pruebe que la unión de una familia numerable de conjuntos numerables es numerable.

4. Pruebe que cualquier conjunto infinito tiene un subconjunto numerable. (Así, con el Axioma de Elección son equivalentes infinito según Dedekind e infinito.)

5. Sea $(A, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado no vacío. Muestre que $(A, \leq)$ es bien ordenado si y sólo si no existe una sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $a_{n+1} < a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. (Ver Ejercicio 4.5.31.)

[1] Ver por ejemplo [J_2] y [RR], donde hay también una extensa bibliografía de trabajos relacionados con los problemas de la independencia lógica del Axioma de Elección y de varias proposiciones más débiles que este axioma.

6. Demuestre las siguientes leyes distributivas.

$$\bigcap_{t\in T}\left(\bigcup_{s\in S} A_{t,s}\right) = \bigcup_{f\in S^T}\left(\bigcap_{t\in T} A_{t,f(t)}\right)$$

$$\bigcup_{t\in T}\left(\bigcap_{s\in S} A_{t,s}\right) = \bigcap_{f\in S^T}\left(\bigcup_{t\in T} A_{t,f(t)}\right).$$

7. Demuestre que el Axioma de Elección es equivalente a la siguiente proposición (Bernays, 1941): Para toda relación R existe una función f tal que $dom\, f = dom\, R$ y $f \subseteq R$.

8. Demuestre que el Axioma de Elección es equivalente a la siguiente proposición (Ward, 1962): El producto cartesiano de una familia de conjuntos no vacíos y mutuamente equipotentes es un conjunto no vacío. (Sugerencia: para una familia $\{X_\alpha\}$ de conjuntos no vacíos, defina $Y = (\bigcup_\alpha X_\alpha)^{\mathbb{N}}$ y $F : Y \times X_\alpha \to Y$ por medio de $F(f,u)(0) = u$ y $F(f,u)(n+1) = f(n)$. Use F para mostrar que $|Y \times X_\alpha| \leq |Y|$; concluya que Y es equipotente a $Y \times X_\alpha$ y emplee la hipótesis.)

8.3 Cuatro Equivalencias Importantes

Hay muchos problemas en Teoría de Conjuntos, Algebra, Análisis y otras ramas de las matemáticas en los cuales el Axioma de Elección o las formas equivalentes que se presentaron en la sección anterior no son inmediatamente aplicables, pero existen otras equivalencias que son muy importantes por sus múltiples aplicaciones. Para demostrarlas necesitamos algunos resultados y definiciones preliminares.

Definición 8.6 Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Se dice que $\mathcal{F}$ es una familia de carácter finito si para cada conjunto A, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ si y sólo si cada subconjunto finito de A pertenece a $\mathcal{F}$.

Lema 8.7 Sea $\mathcal{F}$ una familia de carácter finito y sea $\mathcal{B}$ una cadena en $\mathcal{F}$ con respecto a la contención, entonces $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{F}$.

Demostración:

Es suficiente mostrar que cada subconjunto finito de $\bigcup \mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{F}$. Sea $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Entonces, existen $B_i \in \mathcal{B}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_i \in B_i$. Como $\mathcal{B}$ es una $\subseteq$-cadena, existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$B_i \subseteq B_{i_0}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces $F \subseteq B_{i_0} \in \mathcal{F}$, pero $\mathcal{F}$ es de carácter finito, así que $F \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{F}$. ■

Teorema 8.8 (Lema de Tukey-Teichmüller) Toda familia no vacía de carácter finito tiene un elemento $\subseteq$-maximal.

Demostración:

Supongamos que el resultado es falso, entonces existe una familia no vacía $\mathcal{F}$ de carácter finito que no tiene elementos maximales. Para cada $F \in \mathcal{F}$, sea

$$\mathcal{A}_F = \{E \in \mathcal{F} : F \subsetneq E\}.$$

Entonces $\{\mathcal{A}_F : F \in \mathcal{F}\}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Por el Teorema 8.5(e), existe una función f definida en $\mathcal{F}$ tal que $f(F) \in \mathcal{A}_F$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Así tenemos que $F \subsetneq f(F) \in \mathcal{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Una subfamilia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{F}$ se llama f-inductiva si tiene las siguientes propiedades:

(1) $\emptyset \in \mathcal{J}$;

(2) $A \in \mathcal{J}$ implica $f(A) \in \mathcal{J}$;

(3) si $\mathcal{B}$ es una $\subseteq$-cadena contenida en $\mathcal{J}$, entonces $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{J}$.

Ya que $\emptyset$ es un conjunto finito, $\emptyset \in \mathcal{F}$, y por el Lema 8.7, la familia $\mathcal{F}$ es f-inductiva. Así, el sistema de subfamilias de $\mathcal{F}$ que son f-inductivas es no vacío. Sea

$$\mathcal{J}_0 = \bigcap \{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{F} : \mathcal{J} \text{ es } f\text{-inductiva}\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{J}_0$ es f-inductiva. Así, $\mathcal{J}_0$ es la mínima familia f-inductiva, es decir, cualquier familia f-inductiva contenida en $\mathcal{J}_0$, debe ser $\mathcal{J}_0$. Emplearemos fuertemente este hecho para mostrar que $\mathcal{J}_0$ es una cadena.

Sea

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{J}_0 : B \in \mathcal{J}_0 \text{ y } B \subsetneq A \text{ implica } f(B) \subseteq A\}.$$

Se afirma que si $A \in \mathcal{H}$ y $C \in \mathcal{J}_0$, entonces o bien $C \subseteq A$ o $f(A) \subseteq C$. Para probar esta afirmación, sea $A \in \mathcal{H}$ y definamos

$$\mathcal{G}_A = \{C \in \mathcal{J}_0 : C \subseteq A \vee f(A) \subseteq C\}.$$

Será suficiente mostrar que $\mathcal{G}_A$ es f-inductiva.

Como $\emptyset \in \mathcal{J}_0$ y $\emptyset \subseteq A$, (1) se satisface. Sea $C \in \mathcal{G}_A$, entonces o bien $C \subsetneq A$, $C = A$ o $f(A) \subseteq C$. Si $C \subsetneq A$, entonces $f(C) \subseteq A$ puesto que $A \in \mathcal{H}$. Si $C = A$, entonces $f(A) \subseteq f(C)$. Si $f(A) \subseteq C$, entonces $f(A) \subseteq f(C)$ puesto que $C \subset f(C)$. Así, en cualquier caso $f(C) \in \mathcal{G}_A$ y (2) se satisface. Sea $\mathcal{B}$ una cadena en $\mathcal{G}_A$. Entonces, o bien $C \subseteq A$ para cada $C \in \mathcal{B}$, y en tal caso $\bigcup \mathcal{B} \subseteq A$; o existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $f(A) \subseteq C \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Así $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{G}_A$ y (3) se satisface. Concluimos que $\mathcal{G}_A$ es f-inductiva y así $\mathcal{G}_A = \mathcal{J}_0$.

Ahora afirmamos que $\mathcal{H} = \mathcal{J}_0$. Para probar esto, mostraremos que $\mathcal{H}$ es f-inductiva. Como $\emptyset$ no tiene subconjuntos propios, $\mathcal{H}$ satisface (1) por vacuidad. Supongamos ahora que $A \in \mathcal{H}$ y $B \in \mathcal{J}_0$ es tal que $B \subset f(A)$. Como $B \in \mathcal{J}_0 = \mathcal{G}_A$ y dado que la inclusión $f(A) \subseteq B$ es imposible, tenemos que $B \subseteq A$. Si $B \subset A$, entonces, por la definición de $\mathcal{H}$, $f(B) \subseteq A \subset f(A)$. Si $B = A$, entonces $f(B) \subseteq f(A)$. En cualquier caso se obtiene que $f(B) \subseteq f(A)$; así $f(A) \in \mathcal{H}$ y (2) se satisface para $\mathcal{H}$. Finalmente, sea $\mathcal{B}$ una cadena en $\mathcal{H}$ y sea $B \in \mathcal{J}_0$ tal que $B \subset \bigcup \mathcal{B}$. Veamos que $f(B) \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Como $B \in \mathcal{J}_0 = \mathcal{G}_A$ para cada $A \in \mathcal{B}$, tenemos que, o bien $B \subseteq A$ para algún $A \in \mathcal{B}$, o $f(A) \subseteq B$ para cada $A \in \mathcal{B}$. Si la última alternativa fuera cierta, tendríamos que

$$B \subset \bigcup \mathcal{B} \subseteq \bigcup \{f(A) : A \in \mathcal{B}\} \subseteq B,$$

lo cual es imposible. Así, existe algún $A \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq A$. Si $B \subset A$, entonces como $A \in \mathcal{H}$, tenemos que $f(B) \subseteq A \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Si $B = A$, entonces $B \in \mathcal{H}$ y $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{J}_0 = \mathcal{G}_B$. Esto implica que $f(B) \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ ($\bigcup \mathcal{B} \subseteq B$ es imposible). Así en cualquier caso, $f(B) \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ y, por tanto, $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{H}$. Esto muestra que $\mathcal{H}$ satisface (3). Por todo lo anterior concluimos que $\mathcal{H}$ es f-inductiva y $\mathcal{H} = \mathcal{J}_0$.

De los argumentos anteriores podemos inferir que si $A \in \mathcal{J}_0 = \mathcal{H}$ y $B \in \mathcal{J}_0 = \mathcal{G}_A$, entonces o bien $B \subseteq A$ o $A \subseteq f(A) \subseteq B$, es decir, cualesquiera dos elementos de $\mathcal{J}_0$ son $\subseteq$-comparables; con lo cual $\mathcal{J}_0$ es una cadena. Sea $M = \bigcup \mathcal{J}_0$. Puesto que $\mathcal{J}_0$ es f-inductiva, (3) implica que $M \in \mathcal{J}_0$. Aplicando (2) tenemos que

$$\bigcup \mathcal{J}_0 = M \subset f(M) \in \mathcal{J}_0.$$

Esta contradicción establece el teorema. ■

Teorema 8.9 (Principio Maximal de Hausdorff) Todo conjunto no vacío (parcialmente) ordenado contiene una cadena $\subseteq$-maximal.

Demostración:

Sea $(X, \leq)$ cualquier conjunto ordenado no vacío. Queremos mostrar que X contiene una cadena $\subseteq$-maximal. Esto se implica fácilmente del Lema de Tukey-Teichmüller puesto que la familia $\mathcal{C}$ de todas las cadenas en X es no vacía y de carácter finito. ■

Teorema 8.10 (Lema de Kuratowski-Zorn) Cualquier conjunto (parcialmente) ordenado y no vacío en el cual toda cadena tiene una cota superior tiene un elemento maximal.

Demostración:

Sea $(X, \leq)$ cualquier conjunto ordenado no vacío en el cual cada cadena tiene una cota superior. Usando el Principio Maximal de Hausdorff existe una cadena $\subseteq$-maximal $M \subseteq X$. Sea m una cota superior de M. Entonces m es un elemento maximal de X, pues si existe algún $x \in X$ tal que $m < x$, entonces $M \cup \{x\}$ es una cadena que contiene propiamente a M. Esto contradice la maximalidad de M. ■

El cuarto resultado importante que presentamos en esta sección, es una de las consecuencias más importantes del Axioma de Elección y es un ejemplo fuera de lo común de una proposición que no es constructiva. Ésta asegura que cualquier conjunto puede ser bien ordenado. Su demostración no proporciona información alguna de cómo bien ordenar a los elementos de X; en otras palabras, no asegura que cualquier conjunto pueda ser efectivamente bien ordenado sino que se limita a asegurar que, entre todas las posibles relaciones $R \subseteq X \times X$ hay al menos una que es un buen orden para X.

Un conjunto finito X puede ser obviamente bien ordenado; por ejemplo, si $X = \{a, b, c\}$, entonces $a < b < c$ es un buen orden de X. Sin embargo, no ha sido descubierto algún método para bien ordenar conjuntos tales como $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. En efecto, según la opinión de muchos matemáticos, es imposible construir un buen orden para $\mathbb{R}$.

Ahora probaremos el Teorema del Buen Orden; note que la demostración está basada fuertemente en el Axioma de Elección.

Sea X un conjunto arbitrario, y sea $\mathfrak{B}$ la familia de todos los pares (B, G) donde B es un subconjunto de X y G es un buen orden para B. Introducimos el símbolo $\preceq$ y definimos $(B, G) \preceq (B', G')$ si y sólo si

$$B \subseteq B', \qquad G \subseteq G', \qquad x \in B, y \in B' \setminus B \Rightarrow (x, y) \in G'$$

(Note que la última condición asegura, intuitivamente, que todos los elementos de B preceden a todos los elementos de $B' \setminus B$.)

A (B', G') se le llama continuación de (B, G). Es fácil verificar que $\preceq$ es una relación de orden en $\mathfrak{B}$; los detalles se dejan como ejercicio al lector.

Lema 8.11 Sean $(\mathfrak{B}, \preceq)$ el conjunto ordenado antes definido,

$$\mathcal{C} = \{(B_\alpha, G_\alpha)\}_{\alpha \in I}$$

una cadena en $\mathcal{B}$ y

$$B = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \quad , \quad G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha .$$

Entonces $(B, G) \in \mathcal{B}$.

Demostración:

Claramente $B \subseteq X$; así nuestro resultado será establecido si podemos mostrar que G es un buen orden para B. Primero verifiquemos que G es una relación de orden.

Reflexividad. $x \in B$ implica $x \in B_\alpha$ para algún $\alpha \in I$, entonces $(x, x) \in G_\alpha \subseteq G$; así G es reflexiva.

Antisimetría. Si $(x, y) \in G$ y $(y, x) \in G$, entonces $(x, y) \in G_\alpha$ y $(y, x) \in G_\beta$ para algunos $\alpha, \beta \in I$; pero como $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{B}$, $G_\alpha \subseteq G_\beta$ o $G_\beta \subseteq G_\alpha$. Supongamos que $G_\alpha \subseteq G_\beta$. Entonces $(x, y) \in G_\beta$ y $(y, x) \in G_\beta$, pero G_β es una relación de orden, así $x = y$. Esto prueba que G es antisimétrica.

Transitividad. Si $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in G$, entonces existen $\alpha, \beta \in I$ tales que $(x, y) \in G_\alpha$ y $(y, x) \in G_\beta$; nuevamente usando que $\mathcal{C}$ es una cadena, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $G_\alpha \subseteq G_\beta$. Entonces $(x, y) \in G_\beta$ y $(y, z) \in G_\beta$ implica $(x, z) \in G_\beta \subseteq G$, lo cual muestra que G es transitiva.

Ahora demostraremos que B está bien ordenado por G. Sea $D \subseteq B$, $D \neq \emptyset$. Entonces $D \cap B_{\alpha_0} \neq \emptyset$ para algún $\alpha_0 \in I$; luego $D \cap B_{\alpha_0} \subseteq B_{\alpha_0}$. Por lo tanto, $D \cap B_{\alpha_0}$ tiene un primer elemento b en el orden G_{α_0}; esto es, para todo $y \in D \cap B_{\alpha_0}$, $(b, y) \in G_{\alpha_0}$. Procedamos a demostrar que b es el primer elemento de D en (B, G).

Sea $x \in D$. Si $x \in B_{\alpha_0}$, entonces $(b, x) \in G_{\alpha_0} \subseteq G$. Si por el contrario $x \notin B_{\alpha_0}$ entonces, puesto que $x \in D \subseteq B$, necesariamente $x \in B_\beta$ para algún $\beta \in I$. Ahora como $B_\beta \nsubseteq B_{\alpha_0}$, no puede ocurrir que $(B_\beta, G_\beta) \preceq (B_{\alpha_0}, G_{\alpha_0})$. Pero $\mathcal{C}$ es una cadena, entonces forzosamente $(B_{\alpha_0}, G_{\alpha_0}) \preceq (B_\beta, G_\beta)$. Por la definición de $\preceq$, $(b, x) \in G_\beta \subseteq G$. Esto demuestra que $b = \min D$ en (B, G). ■

Lema 8.12 Si $\mathcal{C}$, B y G están definidos como antes, (B, G) es una cota superior de $\mathcal{C}$ en $(\mathcal{B}, \preceq)$.

Demostración:

Sea $(B_\alpha, G_\alpha) \in \mathcal{C}$; claramente $B_\alpha \subseteq B$ y $G_\alpha \subseteq G$. Ahora supóngase que $x \in B_\alpha$, $y \in B \setminus B_\alpha$; ciertamente $y \in B_\beta$ para algún $\beta \in I$. Ahora $(B_\alpha, G_\alpha) \preceq (B_\beta, G_\beta)$ pues $y \in B_\beta \setminus B_\alpha$, de aquí resulta que $(x, y) \in G_\beta \subseteq G$. Esto es, $(B_\alpha, G_\alpha) \preceq (B, G)$. ■

Teorema 8.13 (del Buen Orden) Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Demostración:

Por los Lemas 8.11 y 8.12 podemos aplicar el Lema de Kuratowski-Zorn a $(\mathcal{B}, \preceq)$; así $\mathcal{B}$ tiene un elemento $\preceq$-maximal (B, G). Mostraremos que $B = X$, así X será bien ordenado. Si $B \subsetneq X$, entonces existe $x \in X \setminus B$. Adjuntando x como último elemento de B (ver Ejemplo 4.132), tenemos que

$$(B, G) \prec (B \cup \{x\}, G \cup \{(a, x) : a \in B\}).$$

Esto contradice el carácter maximal de (B, G). Por lo tanto, $B = X$. ■

Es claro que el Axioma de Elección puede derivarse del Teorema del Buen Orden. En efecto, si X es un conjunto no vacío, por el Teorema del Buen Orden, X puede ser bien ordenado; si B es un subconjunto no vacío de X, sea $f(B) = \min B$. Entonces f es una función de elección.

Tenemos pues probado el siguiente teorema que resalta los resultados que presentamos en esta sección.

Teorema 8.14 *Son equivalentes:*

(a) El Axioma de Elección.
(b) El Lema Tukey-Teichmüller.
(c) Principio Maximal de Hausdorff.
(d) El Lema de Kuratowski-Zorn.
(e) El Teorema del Buen Orden.

El Teorema del Buen Orden fue propuesto originalmente por Cantor, y aunque él no dio alguna demostración, D. Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas en París (1900) se refirió al Teorema del Buen Orden como un resultado de Cantor. Zermelo fue el primero en demostrarlo; sin embargo, debido a la paradoja de Burali-Forti y a que su demostración hacía uso de inducción transfinita, esa primera demostración de Zermelo no fue muy aceptada. Para responder a las críticas, en 1908 Zermelo publicó otra demostración en la que se eliminaba el uso de ordinales. Se dice que la forma axiomática de Zermelo para la Teoría de Conjuntos está fuertemente influenciada por la segunda demostración ya que, hablando vagamente, él seleccionó las formas más débiles para los axiomas en los cuales pudiera justificar su demostración.

La segunda formulación del Axioma de Elección la realizó B. Russell bajo el nombre de Axioma Multiplicativo (1906). Aunque Russell anunció que su principio era un sustituto del principio de Zermelo (creía que era más débil que el principio de Zermelo). Después, en 1909, F. Hausdorff propuso el Principio Maximal; sin embargo, Hausdorff no lo menciona en su famoso libro

Mengenlehre de 1914 y aparece hasta la segunda edición de 1927. Kuratowski redescubrió el Principio Maximal en 1922 y dio otra demostración del Teorema del Buen Orden. El segundo redescubrimiento lo realizó Zorn en 1935, en esta ocasión el Principio Maximal fue decisivamente convincente, el resultado se conoce como el "Lema de Zorn". Similarmente Teichmüller en 1939 y Tukey 1940 formularon independientemente el otro principio maximal.

Ejercicios 8.3

1. Muestre que la intersección de un sistema de familias f-inductivas es una familia f-inductiva.

2. Muestre que la relación $\preceq$ (continuación) definida antes del Lema 8.11 es un orden parcial.

3. Demuestre que si A puede ser bien ordenado, entonces $\mathcal{P}(A)$ puede ser linealmente ordenado. (Sugerencia: considere el primer elemento de $X \triangle Y$, para $X, Y \subseteq A$.)

4. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado en el que cualquier cadena tiene una cota superior. Muestre que para cada $a \in A$, existe un elemento $\leq$-maximal $x \in A$ tal que $a \leq x$.

5. Sea $(L, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Pruebe que existe un conjunto $W \subseteq L$ tal que $\leq$ es un buen orden en W y tal que para cada $x \in L$ existe un $y \in W$ tal que $x \leq y$.

6. Sea A cualquier conjunto infinito. Demuestre que A puede ser bien ordenado de tal manera que A no tenga máximo. También muestre que hay un buen orden para A en el cual A tiene máximo.

7. Pruebe que si $\mathcal{A}$ es una familia de carácter finito, entonces cualquier $X \in \mathcal{A}$ está incluido en un $\subseteq$-maximal $Y \in \mathcal{A}$.

8. Demuestre que la siguiente proposición es equivalente al Axioma de Elección: Cualquier familia $\mathcal{F}$ contiene una subfamilia $\subseteq$-maximal consistente de conjuntos ajenos por pares. (Sugerencia: sea $\mathcal{S}$ una familia de conjuntos ajenos; encuentre una función de elección para $\mathcal{S}$. Esto puede obtenerse usando una subfamilia $\subseteq$-maximal de conjuntos ajenos de

$$\mathcal{E} = \{\{(0, a), (1, A)\} : A \in \mathcal{S} \text{ y } a \in A\}.)$$

9. Pruebe que el Principio Maximal de Hausdorff es equivalente a la siguiente proposición: Si $\mathcal{A}$ es una familia tal que para cada cadena $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento $\subseteq$-maximal.

10. Demuestre que para cualquier orden $\preceq$ en A, existe un orden lineal $\leq$ en A tal que $a \preceq b$ implica $a \leq b$ para todo $a, b \in A$ (es decir, cualquier orden parcial puede extenderse a un orden lineal.) (Sugerencia: sea $\mathcal{O}$ la familia de ordenes de A que contienen a $\leq$. Use el ejercicio anterior para mostrar que $\mathcal{O}$ tiene un elemento $\subseteq$-maximal, $\preceq$. Si ocurriera que $a \npreceq b$ y $b \npreceq a$ para algunos $a, b \in A$, considere la relación
$$\preceq \cup \{(x, y) : x \preceq a \text{ y } b \preceq y\}.)$$

8.4 Uso del Axioma de Elección

Empezamos con algunos resultados ampliamente conocidos en los cuales pocas veces se enfatiza el uso del Axioma de Elección.

Un número real x está en la clausura $\overline{A}$, de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si para cualquier $\epsilon > 0$,
$$A \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) \neq \emptyset.$$
En el siguiente ejemplo se proporciona una caracterización de los puntos clausura.

Ejemplo 8.15 Un número real x está en la clausura de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si y sólo si existe una sucesión de elementos en A que converge a x.

Demostración:

$\Rightarrow]$ Si $x \in \overline{A}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos seleccionar $x_n \in A \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$; como $|x - x_n| < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue fácilmente que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

$\Leftarrow]$ Está parte de la demostración no hace uso del Axioma de Elección y es fácil. ■

Cuando se demuestra en los cursos ordinarios de Cálculo Diferencial e Integral o Análisis la proposición del Ejemplo 8.15 se pone mucha atención a la convergencia de la sucesión y se deja de lado la elección de sus términos, siendo que, en realidad, es más importante la elección, pues de ella se deduce la convergencia.

Otro ejemplo similar es la equivalencia entre la definición ϵ-δ de continuidad y la definición de continuidad secuencial.

Ejemplo 8.16 Una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $x \in (a,b)$ si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en (a,b) tal que $\lim x_n = x$ se tiene que $\lim f(x_n) = f(x)$.

Demostración:

Demostraremos únicamente la parte que hace uso del Axioma de Elección, es decir, la suficiencia. Si f es discontinua en $x \in (a,b)$, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in (a,b) \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ tal que $|f(x) - f(x_n)| \geq \epsilon$. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, pero es falso que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x). \blacksquare$$

La compacidad es una de las propiedades topológicas más importantes. La equivalencia entre compacidad y compacidad secuencial en $\mathbb{R}$ también hace uso del Axioma de Elección.

Ejemplo 8.17 Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si toda sucesión de elementos en K tiene una subsucesión convergente.

Otras consecuencias ya más especiales son las siguientes. Posiblemente, la más famosa de estas consecuencias se debe a Vitali [V] en 1905.

Ejemplo 8.18 Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ no medibles según Lebesgue.

Demostración:

Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Es conocido que μ es numerablemente aditiva, invariante por traslación y que $\mu([a,b]) = b - a$ para cualquier intervalo $[a,b]$.

Sea Z un conjunto de representantes de las clases de equivalencia módulo $\equiv$ en $[0,1]$ dada por $x \equiv y$ si y sólo si $y - x \in \mathbb{Q}$. Utilizando los resultados y la notación del Ejercicio 4.4.16,

$$\mu([0,1]) = \mu\left(\bigcup_{r\in Q} Z(r)\right) = \sum_{r\in Q} \mu(Z(r)).$$

Como $\mu([0,1]) = 1$, $\mu(Z(r_0)) \neq 0$ al menos para algún $r_0 \in \mathbb{Q}$. Pero $\mu(Z(r_0)) = \mu(Z(r))$ para cada $r \in \mathbb{Q}$ ya que μ es invariante por traslaciones; con lo cual $\mu([0,1]) = \infty$, que es imposible. Por lo tanto, Z no es medible según Lebesgue. $\blacksquare$

Sea L una retícula (ver Ejercicio 4.5.20), un ideal en L es un subconjunto propio no vacío I de L tal que

(i) $a \in I$ y $b \le a$ implica $b \in I$;
(ii) $a \in I$ y $b \in I$ implica $a \wedge b := \inf\{a, b\} \in I$.

Una retícula se llama unitaria si existe un elemento $1 \in L$ tal que $1 \wedge a = a$ para cada $a \in L$.

Ejemplo 8.19 Cualquier retícula unitaria tiene un ideal maximal.

Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los ideales en la retícula dada. La familia $\mathcal{F}$ satisface las hipótesis del Lema de Kuratowski-Zorn y así tiene un elemento maximal. ■

Ejemplo 8.20 (Bases de Hamel) Todo espacio vectorial tiene una base.

Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos de vectores linealmente independientes. Obviamente, la familia $\mathcal{F}$ tiene carácter finito y así por el Lema de Tukey-Teichmüller, existe un conjunto $\subseteq$-maximal linealmente independiente π. Usando la maximalidad, se prueba sin dificultad que π es una base. ■

Andreas Blass en 1984 demostró que la proposición del Ejemplo 8.20 implica el Axioma de Elección.

Un grupo G es un grupo libre si tiene un conjunto de generadores A con la siguiente propiedad: Todo elemento g de G distinto del neutro 1 puede ser unívocamente escrito en la forma

$$a_1^{\pm 1} a_2^{\pm 1} \cdots a_n^{\pm 1},$$

donde los $a_i \in A$ y a no aparece adyacente a a^{-1} para cualquier $a \in A$.

Ejemplo 8.21 (Teorema de Nielson-Schreir) Todo subgrupo de un grupo libre es un grupo libre.

La demostración de este teorema es difícil y queda fuera de nuestro alcance. Únicamente mencionaremos que usa el hecho de que el subgrupo dado puede ser bien ordenado y esto se usa para construir, por inducción transfinita, un conjunto de generadores libres del subgrupo.

Una clausura algebraica de un campo F es una extensión C algebraicamente cerrada sobre F, es decir, un campo C en el cual todo polinomio no constante tiene una raíz y cualquier elemento de C es raíz de un polinomio con coeficientes en F. El artículo de Zorn [Z3], donde introduce su principio maximal, se dedica a demostrar el siguiente teorema.

Ejemplo 8.22 (Clausura Algebraica) Todo campo tiene una única (salvo isomorfismo) clausura algebraica.

El siguiente es otro resultado equivalente al Axioma de Elección; fue establecido por G. Klimovski en 1962 y U. Felgner en 1976.

Ejemplo 8.23 Todo grupo contiene un subgrupo abeliano $\subseteq$-maximal.

Sea E un espacio vectorial real. Un funcional lineal sobre E es una función $\varphi : E \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(rx + sy) = r\varphi(x) + s\varphi(y)$$

para todo $x, y \in E$ y $r, s \in \mathbb{R}$. Una función $p : E \to \mathbb{R}$ es un funcional sublineal si

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

para todo $x, y \in E$ y

$$p(ry) = rp(x)$$

para todo $x \in E$, $r \geq 0$.

Ejemplo 8.24 (Teorema de Hahn-Banach) Sea p un funcional sublineal sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y sea φ un funcional lineal sobre un subespacio vectorial V de E tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in V$. Entonces existe un funcional Φ definido sobre E el cual extiende a φ y $\Phi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración:

Considérese la familia $\mathcal{F}$ de todos los funcionales ψ definidos sobre un subespacio de E, que extienden a φ y que satisfacen $\psi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in dom\,\psi$. Definamos $\leq$ en $\mathcal{F}$ como $\psi \leq \psi'$ si y sólo si $\psi \subseteq \psi'$. Entonces $(\mathcal{F}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{F}$. Es fácil verificar que $\mathcal{C}$ es un sistema compatible de funciones. Entonces

$$W = \bigcup \{dom\,\psi : \psi \in \mathcal{F}\}$$

es un subespacio vectorial de E y $\Psi = \bigcup \mathcal{C}$ es un funcional lineal sobre W. Más aún, si $x \in W$, $\Psi(x) = \psi(x)$ para algún $\psi \in \mathcal{C}$, y así $\Psi(x) \leq p(x)$. Aplicando el Lema de Kuratowski-Zorn vemos que $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal, digamos Φ. Para completar la demostración se necesita demostrar que $dom\,\Phi = E$. Esta parte de la demostración no utiliza el Axioma de Elección y, por su extensión, la omitiremos. ■

Por sus bastas consecuencias, el Teorema de Hahn-Banach es de los más importantes en el Análisis Funcional. En 1970 P. R. Andenaes estableció la siguiente versión más fuerte del Teorema de Hahn-Banach y J. Lembcke en 1974 demostró que el resultado de Andenaes implica el Axioma de Elección.

Ejemplo 8.25 Sea X un R-espacio vectorial, Y un subespacio vectorial de X y S un subconjunto de X. Supóngase que $p : X \to R$ es un funcional sublineal sobre X y $f : Y \to R$ un funcional lineal tal que $f(y) \leq p(y)$. Entonces el conjunto $\mathcal{Z}$ de todas las extensiones lineales p-dominadas de f a X tiene un elemento g tal que, para todo $h \in \mathcal{Z}$ que cumple $g(s) \leq h(s)$ para cada $s \in S$, se tiene que $g = h$ en S. Esto es, g es S-maximal en $\mathcal{Z}$.

En el siguiente ejemplo veremos un conocido resultado del Análisis Funcional que implica el Axioma de Elección, según demostraron L. J. Bell y Fremlin en 1972.

Por un punto extremo de un conjunto convexo K de un espacio vectorial se entiende un punto que no es interior a cualquier segmento contenido en K.

Ejemplo 8.26 La esfera unitaria en el dual de un R-espacio vectorial normado tiene un punto extremo.

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia de espacios topológicos. El producto topológico de la familia $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ es definida como el producto cartesiano

$$X = \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$$

de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ equipado con la topología más débil que hace a las proyecciones continuas.

Ejemplo 8.27 (Teorema de Tychonoff) El producto topológico de espacios compactos es compacto.

Una demostración, más o menos popular, de este teorema usa la caracterización de la compacidad por filtros.

Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es un subconjunto propio no vacío del conjunto potencia de X tal que:

$A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ implica $B \in \mathcal{F}$;

$A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$ implica $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre X, es un filtro sobre X tal que para cada $A \subseteq X$, o bien $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Una familia $\mathcal{B}$ es base de filtro si la familia de subconjuntos de X que contienen a intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$,

$$\{A \in \mathcal{P}(X) : A \supseteq A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k, \quad A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{B}\},$$

es un filtro sobre X.

Un espacio X es compacto si y sólo si para cada base de filtro $\mathcal{B}$ sobre X,

$$\bigcap \left\{ \overline{A} : A \in \mathcal{B} \right\} \tag{8.4.1}$$

es no vacía.

Sea $(X, \tau) = \prod_{\alpha \in \Gamma} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ un producto de espacios compactos. La familia de todas las bases de filtros sobre X tiene carácter finito y así por el Lema de Tukey-Teichmüller, toda base de filtro está incluida en una base de filtro maximal (un ultrafiltro). Para mostrar que la intersección (8.4.1) es no vacía siempre que $\mathcal{B}$ sea maximal (lo cual es obviamente suficiente), haremos lo siguiente:

(1) la compacidad de los espacios (X_α, τ_α) implica que las intersecciones de las proyecciones $A_\alpha = \bigcap \left\{ \overline{p_\alpha(B)} : B \in \mathcal{B} \right\}$ es no vacía;

(2) con el Axioma de Elección nuevamente, tomemos $x_\alpha \in A_\alpha$ para cada α, y

(3) la maximalidad de $\mathcal{B}$ implica que el punto $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ pertenece a la intersección $\bigcap \left\{ \overline{A} : A \in \mathcal{B} \right\}$.

Por lo tanto, el espacio (X, τ) es compacto.

En 1935 S. Kakutani conjeturó que el Axioma de Elección es una consecuencia del Teorema de Tychonoff. Quince años después J. L. Kelley publicó su famoso artículo donde mostraba que el Teorema de Tychonoff implica el Axioma de Elección [K$_2$]; sin embargo, J. D. Halpern en [H$_3$] mostró que la demostración de Kelley es deficiente. J. Łos y C. Ryll-Nardzewski observaron que la demostración de Kelley muestra que el Teorema de Tychonoff para espacios compactos de Hausdorff implica el Axioma de Elección para espacios compactos de Hausdorff no vacíos. Pese a todas estas observaciones, la demostración de Kelley es esencialmente correcta. L. E. Ward en 1962 mostró que una versión más débil del Teorema de Tychonoff es equivalente al Axioma de Elección. Posteriormente O. T. Alas en 1969 probó que una versión aún más débil era también equivalente al Axioma de Elección:

Proposición 8.28 Son equivalentes:

(a) El Axioma de Elección.

(b) El Teorema de Tychonoff.

(c) El producto topológico de una familia de espacios topológicos compactos, mutuamente homeomorfos, es compacto.

(d) El producto topológico de un conjunto de espacios mutuamente homeomorfos $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$, donde cada τ_α tiene tres elementos es compacto en la topología producto.

Demostración:

En el ejemplo anterior se demuestra que el Axioma de Elección implica el Teorema de Tychonoff. Por otra parte, es claro que el Teorema de Tychonoff implica (c) y (c) implica (d). Así entonces, basta mostrar que (d) implica el Axioma de Elección; para ello emplearemos la equivalencia del Ejercicio 8.2.8.

Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos equipotentes y

$$a \notin \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha .$$

Para cada $\alpha \in I$, sea $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{a\}$, y defina $\tau_\alpha = \{\emptyset, Y_\alpha, \{a\}\}$. Entonces

$$\{(Y_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$$

satisface las hipótesis de (d). Sea $W = \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ con la topología producto y defina

$$Z_\alpha = \{f \in W : f(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

Entonces $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Consecuentemente,

$$\bigcap_{\alpha\in I} Z_\alpha = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

es no vacío. ■

Otro de los teoremas esenciales de la Topología que necesita del Axioma de Elección para demostrarse es el siguiente.

Ejemplo 8.29 (Lema de Urysohn) Cerrados ajenos en un espacio topológico normal están completamente separados. [2]

---

[2] Läuchli construyó en 1962 un modelo en el cual falla el Axioma de Elección y que contiene un espacio Hausdorff, normal y localmente compacto X con más de un punto, donde toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es constante. Se sigue que el Lema de Urysohn no puede demostrarse sin el Axioma de Elección, y de hecho, que un espacio Hausdorff y compacto no necesariamente es normal.

Por completamente separados entendemos que existe una función continua con valores reales que manda a un conjunto al 0 y el otro al 1.

Sin demostración presentamos el siguiente teorema que establece otras equivalencias del Axioma de Elección.

Teorema 8.30 El Axioma de Elección es equivalente a las siguientes proposiciones:

(a) Sea $n \geq 2$ y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos infinitos. Entonces hay una función f tal que para cada $A \in \mathcal{A}$, $f(A)$ es una partición de A en conjuntos de cardinalidad entre 2 y n (Sierpiński, 1965; Levy, 1962).

(b) Si $m \geq 1$ y $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos no vacíos, entonces hay una función f tal que para cada $A \in \mathcal{A}$, $f(A)$ es un subconjunto no vacío de A con $|f(A)| \leq m$. (Levy, 1915)

(c) Si R es un orden parcial en un conjunto no vacío X y si cualquier subconjunto que es bien ordenado por R tiene una cota superior, entonces X tiene un elemento R-maximal (Kneser, 1950; Szele 1950).

Finalmente dos consecuencias del Axioma de Elección que contrastan con la intuición.

Ejemplo 8.31 (Teorema de Hausdorff) Una esfera S puede escribirse como unión de conjuntos ajenos A, B, C, Q tales que A, B y C son congruentes entre sí, $B \cup C$ es congruente a cada uno de los conjuntos A, B, C y Q es numerable.

Aquí por congruente debe entenderse que existe un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ que transforma uno en el otro. Ahora considérese la siguiente relación entre subconjuntos de $\mathbb{R}^3$: Se define

$$X \approx Y \tag{8.4.2}$$

si existe una partición finita de X, $\{X_i\}_{i=0}^n$, y una partición del mismo número de elementos $\{Y_i\}_{i=0}^n$ de Y, tal que cada X_i es congruente a Y_i para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 8.32 (Teorema de Banach-Tarski) Cualquier bola compacta D en $\mathbb{R}^3$ puede descomponerse en conjuntos ajenos U y V tales que

$$D \approx U \qquad D \approx V.$$

Así, usando el Axioma de Elección, uno puede cortar una bola en una cantidad finita de piezas y reacomodarlas para tener dos bolas del mismo tamaño a la original.

Los siguientes lemas establecerán las pruebas de éstos dos teoremas. Sea G el producto libre de los grupos $\{1, \phi\}$ y $\{1, \psi, \psi^2\}$, es decir, el grupo de todos los productos formales de ϕ, ψ, ψ^2, con las relaciones $\phi^2 = 1$ y $\psi^3 = 1$. Consideraremos dos ejes de rotación a_ϕ, a_ψ a través del centro de la bola D, y consideraremos el grupo de rotaciones generado por la rotación ϕ de 180° alrededor de a_ϕ y una rotación ψ de 120° alrededor de a_ψ.

Lema 8.33 Podemos determinar los ejes a_ϕ y a_ψ de tal modo que los distintos elementos de G representen distintas rotaciones generadas por ϕ y ψ.

Un esbozo de la demostración es como sigue: Tenemos que determinar el ángulo θ entre a_ϕ y a_ψ de tal modo que ningún elemento de G distinto de 1 represente la rotación identidad. Considere un elemento típico de G; o sea, un producto del tipo

$$\alpha = \phi \cdot \psi^{\pm 1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \phi \cdot \psi^{\pm 1}. \tag{8.4.3}$$

Usando las ecuaciones de transformaciones ortogonales y algo de trigonometría elemental, uno puede probar que la ecuación

$$\alpha = 1,$$

donde α es algún producto del tipo (8.4.3), tiene sólo una cantidad finita de soluciones. Consecuentemente, excepto para un conjunto numerable de valores, tenemos libertad para seleccionar el ángulo θ que satisfaga el requerimiento.

Consideremos tal θ, y sea G el grupo de todas las rotaciones generadas por ϕ y ψ.

Lema 8.34 El grupo G puede descomponerse en tres conjuntos ajenos

$$G = A' \cup B' \cup C'$$

tales que

$$A' \cdot \phi = B' \cup C', \qquad A' \cdot \psi = B', \qquad A' \cdot \psi^2 = C'. \tag{8.4.4}$$

Demostración:

Construiremos A', B', C' por recursión sobre las longitudes de los elementos de G. Sea $1 \in A'$, $\phi, \psi \in B'$ y $\psi^2 \in C'$ y entonces continúe como sigue para cada $\alpha \in G$:

$$\alpha \text{ finaliza con } \begin{cases} \psi^{\pm 1}: \\ \\ \phi: \end{cases} \quad \begin{array}{ccc} \alpha \in A' & \alpha \in B' & \alpha \in C' \\ \hline \alpha\phi \in B' & \alpha\phi \in A' & \alpha\phi \in A' \\ \alpha\psi \in B' & \alpha\psi \in C' & \alpha\psi \in A' \\ \alpha\psi^{-1} \in C' & \alpha\psi^{-1} \in A' & \alpha\psi^{-1} \in B' \end{array}$$

Esto garantiza que la condición (8.4.4) se satisface. ■

Hasta ahora, no hemos hecho uso del Axioma de Elección. Para completar la demostración del Teorema de Hausdorff, usaremos un argumento similar a la construcción de un conjunto no medible de números reales.

Sea Q el conjunto de todos los puntos fijos sobre la esfera S de todas las rotaciones $\alpha \in G$. Cada rotación tiene dos puntos fijos; así Q es numerable. El conjunto $S \setminus Q$ es unión de conjuntos ajenos, a saber, de todas las órbitas P_x del grupo G:

$$P_x = \{x \cdot \alpha : \alpha \in G\}.$$

Por el Axioma de Elección, hay un conjunto M tal que contiene exactamente un elemento de cada P_x, $x \in S \setminus Q$. Si hacemos

$$A = M \cdot A', \qquad B = M \cdot B', \qquad C = M \cdot C',$$

se sigue de (8.4.4) que A, B, C son ajenos, congruentes entre sí y $B \cup C$ es congruente a ellos; más aún,

$$S = A \cup B \cup C \cup Q.$$

Esto completa la demostración del Teorema de Hausdorff. ■

Lema 8.35 Sea $\approx$ la relación definida en (8.4.2). Entonces:

(a) $\approx$ es una relación de equivalencia.

(b) Si X y Y son uniones ajenas de X_1, X_2 y Y_1, Y_2, respectivamente, y $X_i \approx Y_i$ para $i \in \{1, 2\}$, entonces $X \approx Y$.

(c) Si $X_1 \subseteq Y \subseteq X$ y si $X \approx X_1$ entonces $X \approx Y$.

Demostración:

Las pruebas de (a) y (b) no son difíciles. Para probar (c), sean $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ y $X_1 = \bigcup_{i=1}^{n} X_{1i}$ tal que X_i es congruente a X_{1i} para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Seleccione una congruencia $f_i : X_i \to X_{1i}$ para cada i, y sea $f : X \to X_1$ la función que coincide con f_i en cada X_i. Ahora sean

$$X_0 = X, \ \ X_1 = f(X_0), \ \ X_2 = f(X_1), \ \ldots$$

$$Y_0 = Y, \ Y_1 = f(Y_0), \ Y_2 = f(Y_1), \ \ldots$$

Si hacemos $Z = \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n \setminus Y_n)$, entonces $f(Z)$ y $X \setminus Z$ son ajenos, $Z \approx f(Z)$ y

$$X = Z \cup (X \setminus Z), \quad Y = f(Z) \cup (X \setminus Z).$$

Por lo tanto, $X \approx Y$ por (b). ■

Ahora probaremos el Teorema de Banach-Tarski. Sea D una bola compacta y sea

$$S = A \cup B \cup C \cup Q$$

la descomposición de la superficie garantizada por el Teorema de Hausdorff. Tenemos que

$$D = A^* \cup B^* \cup C^* \cup Q^* \cup \{c\}, \qquad (8.4.5)$$

donde c es el centro de la bola y para cada $X \subseteq S$, X^* es el conjunto de todos los $x \in D$, distintos de c, tales que su proyección sobre la superficie está en X. Claramente,

$$A^* \approx B^* \approx C^* \approx B^* \cup C^*. \qquad (8.4.6)$$

Sean

$$U = A^* \cup Q^* \cup \{c\}, \qquad V = B \setminus U.$$

De (8.4.6) y del Lema 8.35, tenemos que

$$A^* \approx A^* \cup B^* \cup C^*, \qquad (8.4.7)$$

y así

$$U \approx D.$$

Ahora es fácil encontrar alguna rotación α (no en G) tal que Q y $Q \cdot \alpha$ sean ajenos, y así, usando $C^* \approx A^* \cup B^* \cup C^*$, existe $S \subseteq C$ tal que $S^* \approx Q^*$. Sea p algún punto en $S \setminus C$. Obviamente,

$$A^* \cup Q^* \cup \{c\} \approx B^* \cup S^* \cup \{p\}.$$

Como

$$B^* \cup S^* \cup \{p\} \subseteq V \subseteq D,$$

podemos hacer uso de la relación $U \approx B$ y del Lema 8.35(c), para obtener

$$V \approx D.$$

Esto completa la demostración. ■

Los Teoremas de Hausdorff y Banach-Tarski tienen generalizaciones a dimensiones superiores; sin embargo, son falsos para dimensiones 1 y 2. Estos teoremas están íntimamente relacionados con el problema de la medida, además de tener consecuencias propias. El lector interesado puede consultar [W$_1$].

8.5 El Teorema del Ideal Primo

En los ejemplos de la sección precedente, mostramos que usando el Axioma de Elección, podemos establecer la existencia de ideales maximales en anillos, retículas o álgebras de conjuntos. Entre los teoremas de este tipo, el Teorema del Ideal Primo juega un papel particularmente predominante. Primeramente, porque puede ser usado en muchas demostraciones en lugar del Axioma de Elección; en segundo lugar, porque es equivalente a muchas otras proposiciones; y finalmente, porque es esencialmente más débil que el Axioma de Elección.

Definición 8.36 Un álgebra booleana es un conjunto B con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ (suma y multiplicación booleanas), una operación unitaria $-$ (complemento) y dos constantes $1, 0$ que cumplen las siguientes condiciones:

(a) $u + u = u = u \cdot u$;
(b) $u + v = v + u$ y $u \cdot v = v \cdot u$;
(c) $u + (v + w) = (u + v) + w$ y $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$;
(d) $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$ y $(u \cdot v) + w = (u + w) \cdot (v + w)$;
(e) $u + (u \cdot v) = u = u \cdot (u + v)$
(f) $u + (-u) = 1$ y $u \cdot (-u) = 0$;
(g) $-(u + v) = -u \cdot -v$ y $-(u \cdot v) = -u + -v$;
(h) $-(-u) = u$;
(i) $u \cdot 1 = u$ y $u + 0 = u$.

Se puede introducir un orden (parcial) $\leq$ de manera natural en una álgebra booleana B el cual se introduce en términos de $+$ por

$$u \leq v \quad \text{si y sólo si} \quad u + v = v$$

o equivalentemente

$$u \leq v \quad \text{si y sólo si} \quad u \cdot v = u.$$

Con este orden, 1 y 0 son el máximo y el mínimo de B, respectivamente. Además, $u + v$ y $u \cdot v$ representan el supremo y el ínfimo de $\{u, v\}$, respectivamente.

En el Ejercicio 4.5.20 se definió a una retícula como un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ tal que para cada $a, b \in L$ existen

$$a \wedge b = \inf\{a, b\} \quad \text{y} \quad a \vee b = \sup\{a, b\}.$$

Con lo anterior, se puede describir un álgebra booleana como una retícula $(B, \leq)$ con elementos máximo y mínimo, que es distributiva y cada elemento tiene un complemento, es decir,

$$
\begin{gathered}
(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \\
(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c), \\
\forall a \in L,\ \exists b \in L \text{ tal que } a \vee b = \max B,\ a \wedge b = \min B.
\end{gathered}
$$

Ejemplo 8.37 Para cualquier conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ con $\cup$ como suma, $\cap$ como multiplicación y $X \setminus A$ como el complemento $-A$ de $A \in \mathcal{P}(X)$ es un álgebra booleana. Aquí $\leq$ es simplemente la inclusión de conjuntos.

Ejemplo 8.38 Salvo que X sea finito, la retícula de todos los subconjuntos finitos de X con la contención es distributiva pero no es un álgebra booleana.

Definición 8.39 Un ideal I en un álgebra booleana B es un subconjunto no vacío de B tal que:

(a) $u \in I$ y $v \leq u$ implica $v \in I$;

(b) $u, v \in I$ implica $u + v \in I$.

Antes de dar ejemplos de ideales observe que cualquier ideal I contiene a 0.

Ejemplo 8.40 $\{0\}$ es el $\subseteq$-mínimo ideal en cualquier álgebra Booleana B y $I = B$ es el $\subseteq$-máximo ideal. A estos ideales les llamaremos trivial e impropio, respectivamente; todos los otros ideales se llaman propios.

Ejemplo 8.41 Un ideal I, no trivial, es propio si y sólo si $1 \notin I$.

Ejemplo 8.42 En cualquier álgebra booleana, si $u \in B$, entonces

$$\{v \in B : v \leq u\}$$

es un ideal, llamado ideal principal generado por $u \in B$.

Ejemplo 8.43 En $\mathcal{P}(X)$ la familia $\mathcal{I}$ de todos los subconjuntos finitos de X es un ideal.

Definición 8.44 Un ideal propio I se llama primo si siempre que $u \cdot v \in I$ se tiene que $u \in I$ o $v \in I$.

Se deduce fácilmente que si I es un ideal primo, entonces para cada $u \in B$, o bien $u \in I$, o $-u \in I$ (pues $u \cdot -u = 0$). El recíproco también es cierto, es decir, si I es un ideal propio tal que para cualquier $u \in B$, $u \in I$, o $-u \in I$, entonces I es un ideal primo. En efecto, si $u \cdot v \in I$, pero $u \notin I$, $v \notin I$, entonces $-u, -v \in I$, luego $-(u \cdot v) = -u + -v \in I$, de aquí que

$$1 = (u \cdot v) + -(u \cdot v) \in I;$$

lo que contradice que I sea un ideal propio.

Proposición 8.45 En un álgebra booleana, un ideal I es primo si y sólo si es $\subseteq$-maximal en la familia de ideales propios, es decir, I no está contenido propiamente en algún ideal propio.

Demostración:

[$\Leftarrow$] Sea I un ideal $\subseteq$-maximal en la familia de todos los ideales propios de un álgebra booleana B. Para mostrar que I es un ideal primo basta probar que para cada $u \in B$, o bien $u \in I$ o $-u \in I$. Sea $u \in B$ y supongamos que $u \notin I$. Consideremos el siguiente subconjunto de B:

$$J = \{x + y : x \le u, \quad y \in I\}.$$

Entonces J es un ideal en B ya que:

(a) Si $z \in B$ es tal que $z \le x + y$ para algunos $x \le u$, $y \in I$, entonces $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$. Pero como $z \cdot x = \inf\{x, z\}$, $z \cdot x \le x$ y dado que $x \le u$, se sigue que $z \cdot x \le u$. Además, dado que I es un ideal, $z \cdot y \le y$ implica $z \cdot y \in I$. Por lo tanto, $z \in J$.

(b) Si $x_1 \le u$, $x_2 \le u$, $y_1, y_2 \in I$, entonces $x_1 + x_2 = \sup\{x_1, x_2\} \le u$ y $y_1 + y_2 \in I$, luego

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in J.$$

También $I \subsetneq J$, puesto que claramente $I \subseteq J$ y $u \in J$ mientras que $u \notin I$. Así $J = B$, dado que I es maximal. Por lo tanto, existen $x \le u$, $y \in I$ tales que $x + y = 1$. De esto se concluye que $u + (x + y) = u + 1$ o bien $u + y = 1 + u = 1$. Entonces $-u = -u \cdot 1 = -u \cdot (u + y) = (-u \cdot u) + (-u \cdot y) = -u \cdot y$; o sea que $-u \le y$. Se concluye que $-u \in I$.

[$\Rightarrow$] Si I es un ideal primo y $I \subsetneq J$, entonces existe $u \in J \setminus I$. Como I es primo, $-u \in I$, luego $1 = u + -u \in J$; o sea, $J = B$. ■

Hay nociones duales para ideal e ideal primo.

Definición 8.46 Un filtro F en un álgebra booleana es un subconjunto no vacío tal que:

(a) $u \in F$ y $u \le v$ implica $v \in F$;

(b) $u \in F$ y $v \in F$ implica $u \cdot v \in F$.

$\{1\}$ y B son filtros en B, llamados trivial e impropio; a todos los demás filtros les llamaremos propios. También por dualidad, un filtro F, no trivial, es propio si y sólo si $0 \notin F$.

Ejemplo 8.47 La colección de conjuntos co-finitos (es decir, conjuntos con complemento finito) es un filtro en $\mathcal{P}(X)$ para cualquier conjunto (infinito) X.

Ejemplo 8.48 En cualquier álgebra booleana, si $u \in B$, entonces

$$\{v \in B : u \leq v\}$$

es un filtro, llamado el filtro principal generado por $u \in B$.

Ejemplo 8.49 Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una familia con la propiedad de la intersección finita (es decir, la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{G}$ es no vacía), entonces existe un filtro propio $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}(X)$ que contiene a $\mathcal{G}$. En efecto, basta considerar a la familia $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos F de X con la propiedad de que existe un subconjunto finito $\{G_1, \ldots G_n\}$ de $\mathcal{G}$ tal que

$$G_1 \cap \ldots \cap G_n \subseteq F.$$

Definición 8.50 Un filtro propio F se llama ultrafiltro si siempre que $u + v \in F$ implica que $u \in F$ o $v \in F$.

También para un filtro propio F son equivalentes:

(a) F es un ultrafiltro,

(b) Para cada $u \in B$, $u \in F$ o $-u \in F$,

(c) F es $\subseteq$-maximal en la familia de todos los filtros propios.

Ejemplo 8.51 Sea $x \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los subconjuntos $V \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$x \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq V$$

para algún $\epsilon > 0$. $\mathcal{F}$ es un filtro propio en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$; pero no es un ultrafiltro ya que ni $\{x\}$, ni $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ son elementos de $\mathcal{F}$.

Lema 8.52 Si $\{I_\alpha\}_\alpha$ es una $\subseteq$-cadena de ideales en un álgebra Booleana B tales que $u_0 \in B \setminus I_\alpha$ para cada α, entonces $\bigcup_\alpha I_\alpha$ es un ideal en B que no contiene a u_0.

Demostración:

(a) Si $u \in I = \bigcup_\alpha I_\alpha$ y $v \leq u$, entonces $u \in I_\alpha$ para algún α. Como I_α es un ideal, $v \in I_\alpha \subseteq I$.

(b) Si $u, v \in I$, entonces existen α_1, α_2 tales que $u \in I_{\alpha_1}$ y $v \in I_{\alpha_2}$. Como $\{I_\alpha\}_\alpha$ es una $\subseteq$-cadena, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I_{\alpha_1} \subseteq I_{\alpha_2}$; así, $u + v \in I_{\alpha_2} \subseteq I$.

Es claro que $u_0 \notin I$. ■

Teorema 8.53 (del Ideal Primo) Toda álgebra booleana tiene un ideal primo.

Demostración:

Sean B un álgebra booleana y $u \in B$ un elemento fijo. Consideremos la familia I de todos los ideales en B que no contienen a u; por el lema anterior, la familia I ordenada por contención cumple las hipótesis del Lema de Kuratowski-Zorn; así I tiene un elemento maximal I, este ideal es un ideal primo. ■

El Teorema del Ideal Primo es una consecuencia fácil del Axioma de Elección, pero J. D. Halpern demostró que el recíproco es falso, es decir, el Axioma de Elección no puede demostrarse a partir del Teorema del Ideal Primo. En esta sección veremos algunas equivalencias del Teorema del Ideal Primo. Primero note que el Teorema 8.53 es equivalente a una versión aparentemente más fuerte.

Teorema 8.54 En cualquier álgebra booleana, todo ideal propio puede extenderse a un ideal primo.

Para mostrar que la versión más fuerte se sigue de la versión débil, tomemos B un álgebra booleana B e I un ideal en B. Considere la relación de equivalencia

$$u \sim v \quad \text{si y sólo si} \quad (u \cdot -v) + (v \cdot -u) \in I.$$

Sea C el conjunto de todas las clases de equivalencia $[u]$ y defina operaciones $+$, $\cdot$ y $-$ sobre C como sigue:

$$[u] + [v] = [u + v], \qquad [u] \cdot [v] = [u \cdot v], \qquad -[u] = [-u].$$

Entonces C es un álgebra booleana, llamada cociente de B. Por el Teorema del Ideal Primo, C tiene un ideal primo K. No es difícil verificar que el conjunto

$$J = \{u \in B : [u] \in K\}$$

es un ideal primo en B y que $I \subseteq J$.

Usando la dualidad entre ideales y filtros, tenemos las siguientes formulaciones del Teorema del Ideal Primo.

Teorema 8.55 Son equivalentes al Teorema del Ideal Primo:

(a) Toda álgebra booleana tiene un ultrafiltro.

(b) Cualquier filtro propio en un álgebra booleana puede extenderse a un ultrafiltro.

Un caso especial de álgebra booleana es el conjunto $\mathcal{P}(X)$ con las operaciones conjuntistas $\cup$, $\cap$, $\setminus$; el concepto de filtro y ultrafiltro coinciden con las definiciones anteriores (ver después del Teorema de Tychonoff).

Teorema 8.56 (del Ultrafiltro) Todo filtro sobre un conjunto X puede extenderse a un ultrafiltro.

Tenemos demostrado que el Teorema del Ultrafiltro es equivalente al Teorema del Ideal Primo. Sin embargo, la correspondiente versión más débil del Teorema del Ultrafiltro: Cada conjunto no vacío X tiene un ultrafiltro sobre X, es trivialmente cierta sin usar el Axioma de Elección. En efecto, sea $x \in X$, entonces el filtro principal generado por $\{x\}$,

$$\mathcal{F}_x = \{Y \subseteq X : x \in Y\}$$

claramente es un ultrafiltro sobre X. Sin embargo, la proposición: Cada conjunto infinito X tiene un ultrafiltro no principal, no es obvia. S. Feferman mostró en 1964 que es consistente con los axiomas ZF que todo ultrafiltro en $\mathbb{N}$ sea principal. Posteriormente A. Blass en 1977 [B_2], modificando el método de Feferman, probó que también es consistente con los axiomas ZF que todo ultrafiltro sobre un conjunto X sea principal. De lo anterior se deduce que sin el Axioma de Elección la proposición anterior es indemostrable. Pero puede probarse que es esencialmente una versión más débil que el Teorema del Ideal Primo (ver [J_2, pag. 132, problema 5]). Un buen ejemplo del empleo de la proposición anterior lo dio Sierpiński en 1938 al mostrar que se pueden construir subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}$ según Lebesgue si se acepta la existencia de ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$. El resultado de Sierpiński fue mejorado por Z. Samadeni en [S_1].

Ahora daremos ejemplos del uso del Teorema del Ideal Primo.

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto dado S es un álgebra de conjuntos si:

$S \in \mathcal{A}$,

$X, Y \in \mathcal{A}$ implica $X \cup Y \in \mathcal{A}$, $X \cap Y \in \mathcal{A}$,

$X \in \mathcal{A}$ implica $S \setminus X \in \mathcal{A}$.

Un homomorfismo entre álgebras booleanas B_1 y B_2 es una función $\pi : B_1 \to B_2$ que preserva las operaciones de suma, multiplicación y complemento de las álgebras B_1 y B_2. Un homomorfismo biyectivo se llama isomorfismo. Si existe un isomorfismo las álgebras se dicen isomorfas.

Ejemplo 8.57 (Teorema de Representación de Stone) Toda álgebra booleana es isomorfa a un álgebra de conjuntos.

Demostración:

Sea B un álgebra booleana; sea

$$\mathcal{S} = \{U : U \text{ es un ultrafiltro en } B\}.$$

Para cada $u \in B$, sea $\pi(u) = \{U \in S : u \in U\}$. Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \pi(u + v) &= \pi(u) \cup \pi(v), \\ \pi(u \cdot v) &= \pi(u) \cap \pi(v), \\ \pi(-u) &= \mathcal{S} \setminus \pi(u). \end{aligned}$$

Si $u \neq v$, entonces $u \not\leq v$ o $v \not\leq u$. Supongamos que $u \not\leq v$, un argumento similar se sigue si $v \not\leq u$. Si $u \cdot (-v) = 0$, entonces

$$v = v + 0 = v + (u \cdot (-v)) = (u + v) \cdot (v + (-v)) = (u + v) \cdot 1 = u + v;$$

o sea $u \leq v$. Por lo tanto, $u \cdot (-v) \neq 0$. Sea $F = \{w \in B : u \cdot (-v) \leq w\}$ el filtro principal generado por $u \cdot (-v)$. Claramente F es un filtro propio; por el Teorema 8.55(b), F puede extenderse a un ultrafiltro U.

Ahora $-(u \cdot (-v)) = -u + v \notin U$, lo cual implica que $U \notin \pi(-u + v) = \pi(-u) \cup \pi(v)$, por lo que $U \in \pi(u)$ y $U \notin \pi(v)$. Esto establece la inyectividad de π. Así, π es un isomorfismo de B sobre $\pi(B)$. ■

Es un hecho notable que el Teorema de Representación de Stone es equivalente al Teorema del Ideal Primo.

Teorema 8.58 El Teorema de Representación de Stone implica el Teorema del Ideal Primo.

Demostración:

Sean B un álgebra booleana, $\mathcal{F}$ un álgebra de conjuntos isomorfa a B y $\varphi : B \to \mathcal{F}$ un isomorfismo. Tomemos $p \in \bigcup \mathcal{F}$ y sea

$$U = \{u \in B : p \in \varphi(u)\}.$$

No es difícil mostrar que U es un ideal primo en B. ■

El Teorema del Ideal Primo también implica una cuestión indecidible en ZF, a saber, cualquier conjunto puede ser totalmente ordenado. De hecho, a partir del Teorema del Ideal Primo se puede demostrar el Principio de Extensión de Orden que aparece en el siguiente ejemplo y que evidentemente es más fuerte que la proposición que asegura la existencia de un orden lineal para cualquier conjunto; sin embargo, el Principio de Extensión de Orden no implica el Teorema del Ideal Primo (ver [J$_2$, sección 7.2, problemas 7.8 y 5.27]). Si $\leq$ y $\preceq$ son órdenes (parciales) de un conjunto P, entonces se dice que $\preceq$ extiende a $\leq$ si para cualesquiera $p, q \in P$, $p \leq q$ implica $p \preceq q$.

Ejemplo 8.59 (Principio de Extensión de Orden) Todo orden (parcial) de un conjunto P puede extenderse a un orden lineal de P.

Como una aplicación del Teorema del Ideal Primo al Álgebra tenemos el siguiente. Un campo F es un campo ordenado si hay un orden lineal $\leq$ en F que satisface:

(i) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$ para todo c;

(ii) Si $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Ejemplo 8.60 (Teorema de Artin-Schreir) Todo campo en el que -1 no es suma de cuadrados puede ser ordenado.

Ejemplo 8.61 El Teorema del Ideal Primo implica que cualquier producto topológico de espacios compactos de Hausdorff es no vacío.

Ejemplo 8.62 El Teorema del Ideal Primo implica que cualquier producto topológico de espacios compactos de Hausdorff es compacto.

Otra equivalencia al Teorema del Ideal primo es una versión débil del Teorema de Tychonoff.

Teorema 8.63 El Teorema del Ideal Primo es equivalente a la siguiente proposición: El producto topológico de cualquier familia de espacios discretos con dos puntos cada uno, es compacto.

Ejemplo 8.64 El Teorema del Ideal Primo implica el Teorema de Compactación de Stone-Čech.

Ejemplo 8.65 El Teorema del Ideal Primo implica el Teorema de Hahn-Banach.

Podemos decir más al respecto. Una medida (de valores reales) en un álgebra booleana es una función no negativa $\mu : B \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$, y $\mu(a + b) = \mu(a) + \mu(b)$ siempre que $a \cdot b = 0$. El Teorema de Hahn-Banach es equivalente a la afirmación de que toda álgebra booleana admite una medida con valores reales.

La demostración del Teorema de Hahn-Banach a partir del Teorema del Ideal Primo fue dada por J. Łos y C. Ryll-Nardzewski. Otra versión de la prueba la dio W. A. J. Luxemburg. La equivalencia antes asegurada se debe a Ryll-Nardzewski y Luxemburg.

Ejercicios 8.5

1. Verifique las afirmaciones de los Ejemplos 8.38, 8.41, 8.42, 8.47, y 8.48.

2. (a) Supóngase que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto X y sea $A \in \mathcal{F}$. Demuestre que si $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{F}$ o $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

   (b) Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto X y

   $$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

   Muestre que para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i \in \mathcal{F}$.

   (c) Pruebe que si X es un conjunto finito, entonces cualquier ultrafiltro sobre X es principal.

3. Demuestre que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre un conjunto X, entonces cualquier $U \in \mathcal{U}$ es infinito.

4. Muestre que si I es un álgebra booleana B, entonces $B \setminus I$ es un filtro en B.

5. Complete la demostración de la equivalencia entre el Teorema del Ideal Primo y el Teorema de Representación de Stone.

6. (a) Muestre que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales y los filtros en un álgebra booleana.

   (b) Muestre que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales primos y los ultrafiltros en un álgebra booleana.

7. Supóngase que $f : B_1 \to B_2$ es un homomorfismo de álgebras booleanas. Pruebe que si J es un ideal (respectivamente, un filtro) en B_2, entonces $f^{-1}(J)$ es un ideal (respectivamente, un filtro) en B_1. En particular $I(f) = f^{-1}(\{0\})$ es un ideal primo en B_1 llamado núcleo de f; $F(f) = f^{-1}(\{1\})$ es un ultrafiltro en B_2 llamado el co-núcleo de f.

8. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto X, y sea $f : X \to Y$ una función. Muestre que
$$f^{\#}\mathcal{U} = \left\{ V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{U} \right\}$$
es un ultrafiltro sobre Y.

9. Sea B un álgebra booleana. Para cada $u \in B$, sean:
$$I_u = \{x \in B : u \cdot x = 0\},$$
$$F_u = \{x \in B : u + x = 1\}.$$
Muestre que estos conjuntos son, respectivamente, un ideal y un filtro en B.

10. Demuestre que si F es un filtro en B, entonces el mínimo filtro que contiene a $F \cup \{u\}$ es
$$\{y \in B : \exists x \in F \text{ tal que } y \geq x \cdot u\}.$$

11. Un carácter de un álgebra booleana B es un homomorfismo $\varphi : B \to 2$. La colección de todos los caracteres de B se llama espectro de B y es denotado por $spec(B)$ Pruebe que:

    (a) Hay una correspondencia biyectiva entre $spec(B)$ y la familia de ultrafiltros en B dada por $\varphi \mapsto F(\varphi)$.

    (b) Hay una correspondencia biyectiva entre $spec(B)$ y la familia de todos los ideales primos en B dada por $\varphi \mapsto I(\varphi)$.

    (c) La función $\Phi : B \to \mathcal{P}(spec(B))$ definida por
    $$\Phi(u) = \{\varphi \in spec(B) : f(u) = 1\}$$
    es un homomorfismo entre álgebras booleanas.

12. Demuestre que la siguiente proposición es equivalente al Teorema del Ideal Primo: Si B es un álgebra booleana y $S \subseteq B$ es tal que $0 \notin S$ y S es cerrado con respecto a $\cdot$, entonces existe un ideal $\subseteq$-maximal ajeno a S. (Sugerencia: para la necesidad considere $J = \{u \in B : \exists\, v \in S,\ u \le -v\}$, muestre que J es un ideal propio y aplique el Teorema 8.54. Para la suficiencia considere $S = \{1\}$.)

13. En este Ejercicio se establece la equivalencia del Teorema del Ideal Primo con versiones débiles del Teorema de Tychonoff.

    (a) Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre un espacio Hausdorff, pruebe que la intersección $\bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{U}\}$ contiene a lo más un punto.

    (b) Demuestre que el Teorema del Ultrafiltro implica que cualquier producto de espacios Hausdorff compactos es no vacío. (Sugerencia: sea $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Sea $\mathcal{Z}$ el conjunto de todos las funciones f con $dom\, f \subseteq I$ y $f(\alpha) \in X_\alpha$, y sea $\mathcal{Z}_\alpha = \{f \in \mathcal{Z} : \alpha \in dom\, f\}$ para cada $\alpha \in I$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado en $\mathcal{Z}$ por $\mathcal{Z}_\alpha$, $\alpha \in I$, y sea $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ un ultrafiltro. Sea $\mathcal{U}_\alpha$ la proyección de $\mathcal{U}$ sobre X_α. Para cada $\alpha \in I$, la intersección
    $$\bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{U}_\alpha\}$$
    contiene exactamente un punto $x_\alpha \in X_\alpha$.)

    (c) Demuestre que el Teorema del Ultrafiltro implica que cualquier producto topológico de espacios Hausdorff compactos, es compacto. (Sugerencia: el producto es no vacío por el inciso anterior. En la demostración del Teorema de Tychonoff en la Sección 8.4, la primera parte usa únicamente el Teorema del Ultrafiltro. El uso del Axioma de Elección en el punto (2) es eliminado por el inciso (a).)

    (d) Demuestre que la siguiente proposición implica el Teorema del Ideal Primo: El producto topológico de cualquier familia de espacios discretos con dos puntos cada uno es compacto. (Sugerencia: sea B un álgebra booleana, y sea $X = \prod\{\{u, -u\} : u \in B\}$. Para una subálgebra finita A de B y un ideal primo I en A, sean
    $$X_I = \{x \in X : x(u) \in I \text{ para cada } u \in A\}$$
    y $X_A = \bigcup\{X_I : I \text{ es un ideal primo en } A\}$. La familia
    $$\{X_A : A \text{ es una subálgebra finita}\}$$
    es una base de filtro de conjuntos cerrados; de su intersección se obtiene un ideal primo en B.)

(e) Demuestre que la siguiente proposición implica el Teorema del Ideal Primo: El espacio generalizado de Cantor $\{0,1\}^I$ es compacto para cualquier I. (Sugerencia: use esto para demostrar la proposición del inciso (c). Es suficiente mostrar que cualquier producto de conjuntos de dos elementos cada uno, es no vacío. Sea S un conjunto de pares (no ordenados) ajenos $p = \{a, b\}$ y sea $I = \bigcup\{p : p \in S\}$. En el producto $\{0,1\}^I$, los conjuntos $X_p = \{f : f(a) \neq f(b)$ si $p = \{a, b\}\}$ son cerrados y forman una base de filtro. La intersección proporciona una función de elección para S.)

14. Use el ejercicio anterior y establezca el Teorema de la Compactación de Stone-Čech. (Sugerencia: βX es un subconjunto de $[0,1]^{\mathcal{X}}$.)

8.6 Otras Proposiciones Relacionadas.

Con frecuencia, especialmente cuando se trabaja con conjuntos de números reales, no es necesario usar en plenitud el Axioma de Elección y de hecho es mucho más usada una débil variación de éste.

Axioma de Elecciones Numerables Para cualquier familia numerable de conjuntos no vacíos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe una función $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ tal que $f(n) \in A_n$.

Con el Axioma de Elecciones Numerables, pueden demostrarse muchas proposiciones extremadamente útiles en el Análisis Matemático, los Ejemplos 8.15, 8.16 y 8.17 pueden demostrarse con él.

Teorema 8.66 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) El Axioma de Elecciones Numerables.

(b) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos ajenos, entonces hay una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(c) El producto cartesiano de una familia numerable de conjuntos no vacíos es no vacío.

En 1942, P. A. Bernays formuló el siguiente axioma que es una versión más débil que el Axioma de Elección pero más fuerte que el Axioma de Elecciones Numerables (las demostraciones de estas afirmaciones pueden encontrarse en [J2]; la primera en el problema 26 de la página 85 y la segunda en la sección 8.2).

Axioma de Elección Dependiente Si R es una relación en un conjunto no vacío X tal que para todo $x \in X$, existe $y \in X$ tal que xRy, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $x_n R x_{n+1}$.

Teorema 8.67 El Axioma de Elección Dependiente implica el Axioma de Elecciones Numerables.

Demostración:

Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia a lo más numerable de conjuntos no vacíos y sea X el conjunto de todas las sucesiones finitas $s = (a_i)_{i=0}^{k}$ tales que $a_0 \in A_0$, ..., $a_k \in A_k$. Definamos

$$s\,R\,t \quad \text{si y sólo si} \quad s = (a_i)_{i=0}^{k} \ \text{ y } \ t = (a_i)_{i=0}^{k+1}.$$

Aplicando el Axioma de Elección Dependiente se obtiene una sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 8.68 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) El Axioma de Elección Dependiente.

(b) Todo conjunto linealmente ordenado que no contiene la imagen de una sucesión estrictamente decreciente es bien ordenado.

(c) Sea R una relación en A tal que para todo $x \in X$ existe $y \in X$ tal que xRy. Si $a \in A$, entonces hay una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $x_0 = a$ y $x_n\,R\,x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b). Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado que no sea bien ordenado. Entonces existe un subconjunto de A, digamos B, tal que B no tiene un mínimo elemento. Ahora, el dominio del orden dual estricto, restringido a B, $>_B$, es B, de otro modo B tendría un elemento minimal. Por hipótesis, existe una sucesión $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ en B tal que $y_n >_B y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, A contiene una sucesión estrictamente decreciente.

(b) $\Rightarrow$ (a). Sean R una relación en A y X el conjunto de todas las sucesiones finitas φ en A tales que

$$\varphi(0)\,R\,\varphi(1)\,R\,\varphi(2)\,R \cdots R\,\varphi(n-1)$$

(cuando $dom\,\varphi = n$). Definiendo $\prec$ en X por $\varphi \prec \psi$ si y sólo si $\varphi \supset \psi$, tenemos que $(X, \prec)$ es un conjunto ordenado, el cual evidentemente no es bien ordenado. Empleando la hipótesis, existe una sucesión $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ estrictamente decreciente en X. Ahora, $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema compatible de funciones, por lo cual, $\varphi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ es una sucesión en A tal que $\varphi(n)\, R\, \varphi(n+1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\Rightarrow$ (c). Sean R una sucesión en A y $a \in A$. Considere

$$B = \bigcap \{C \subseteq A : a \in C \text{ y } R(C) \subseteq C\}.$$

Es fácil mostrar que el dominio de la restricción de R a B es B. Consecuentemente, por hipótesis, existe una sucesión $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ en B tal que $y_n\, R\, y_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, también puede mostrarse que

$$B = \bigcup_{m=0}^{\infty} R^m(\{a\}),$$

donde $R^0 = Id_A$ y $R^{m+1} = R^m \circ R$. Así, $y_0 \in R^m(\{a\})$ para algún $m \in \mathbb{N}$, es decir, existe $\{z_0, z_1, \ldots, z_m\} \subseteq B$ tal que $z_0 = a$, $z_m = y_0$ y para cada $n < m$, $z_n\, R\, z_{n+1}$. Si hacemos

$$x_n = \begin{cases} z_n, & \text{para } n < m \\ y_{n-m}, & \text{para } n \geq m, \end{cases}$$

entonces es claro que $x_0 = a$ y $x_n\, R\, x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Trivial. ■

Finalmente consideremos otras dos proposiciones más débiles que el Axioma de Elección.

Axioma de Elección para Conjuntos Finitos Para cualquier familia no vacía $\mathcal{F}$ de conjuntos finitos no vacíos existe una función $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(F) \in F$.

Axioma de Elección n-Finito Para cualquier familia no vacía $\mathcal{F}$ de conjuntos de n elementos existe una función $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(F) \in F$.

Renunciar parcialmente al Axioma de Elección y adoptar proposiciones alternativas no nos deja del todo desamparados, los ejemplos anteriores son una muestra importante de ello. Por otra parte, estas proposiciones, posibles sustitutas del Axioma de Elección, no traen consigo resultados tan paradójicos como el Axioma de Elección. Pero estos axiomas más débiles que el Axioma de Elección son insuficientes para las necesidades plenas de las matemáticas.

A continuación enlistamos las proposiciones alternativas al Axioma de Elección que hemos considerado y mostramos en un diagrama sus relaciones. Como se dijo antes, el Axioma de Elección puede sustituirse por estas u otras proposiciones, y es interesante saber el alcance de estas Teorías de Conjuntos "no estándar".

[AE] Todo conjunto no vacío tiene una función de elección.

[TIP] Toda álgebra booleana contiene un ideal (propio) primo.

[AED] Si R es una relación en un conjunto no vacío X tal que para todo $x \in X$, existe $y \in X$ tal que xRy. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n R x_{n+1}$.

[AEN] Para cualquier familia numerable de conjuntos no vacíos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existe una función $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ tal que $f(n) \in A_n$.

[PO] Todo conjunto puede ser linealmente ordenado.

[AEF] Para cualquier familia $\mathcal{F}$ de conjuntos finitos no vacíos existe una función $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(F) \in F$.

[AEF$_n$] Cualquier familia $\mathcal{F}$ de conjuntos de n elementos, existe una función $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(F) \in F$.

$$
\begin{array}{c}
\text{AE} \\
\Downarrow \\
\overbrace{\hspace{6em}}^{} \\
\begin{array}{cc}
\text{TIP} & \text{AED} \\
\Downarrow & \Downarrow \\
\text{PO} & \text{AEN} \\
\Downarrow & \\
\text{AEF} & \\
\Downarrow & \\
\text{AEF}_n &
\end{array}
\end{array}
$$

Ejercicios 8.6

1. Demuestre el Teorema 8.66.
2. Demuestre que el Principio de Ordenación PO implica el Axioma de Elección para conjuntos Finitos.
3. Demuestre que AEF implica AEF$_n$.

8.7 Matemáticas sin Elección.

Es muy interesante saber cómo son las matemáticas sin el Axioma de Elección. S. Feferman, como ya se mencionó, demostró que si no se acepta el Axioma de Elección se puede suponer que todos los ultrafiltros sobre los números naturales son principales. En esta sección daremos otros ejemplos que muestran lo grave que pueden ser las Matemáticas sin el Axioma de Elección. Para poder entenderlos, primero daremos una breve idea de lo que significa "un modelo". Esto lo haremos con base a un ejemplo.

Nosotros definimos los conjuntos ordenados como pares $(A, \leq)$ donde A es un conjunto y $\leq$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en A. Equivalentemente, un conjunto ordenado es una estructura $(A, \leq)$, la cual satisface los siguientes axiomas:

Axioma de Reflexividad Para cada $a \in A$, $a \leq a$.

Axioma de Antisimetría. Si $a, b \in A$ y

$$a \leq b \quad \text{y} \quad b \leq a,$$

entonces $a = b$.

Axioma de Transitividad. Para cualesquiera $a, b, c \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Ahora podemos manifestar que los axiomas anteriores comprenden la teoría axiomática del orden y que los conjuntos ordenados son modelos de esta teoría axiomática. Nuestro análogo al Axioma de Elección en nuestra teoría del orden es el siguiente:

Axioma de Linealidad Para cualesquiera $a, b \in A$ o bien $a \leq b$ o $b \leq a$.

Si estamos interesados en saber cuándo el Axioma de Linealidad es consistente e independiente de los otros axiomas de la teoría del orden, necesitamos dar, por lo menos, dos modelos tal que en uno de ellos satisfaga el Axioma de Linealidad y en el otro no. Como posibles modelos tenemos los siguientes:

$$(\{0, \{0\}\}, \in) \quad \text{y} \quad (\mathcal{P}(\{0, 1\}), \subseteq).$$

Esto nos lleva a concluir la independencia y consistencia del Axioma de Linealidad en nuestra teoría del orden.

Cuando se desea investigar fenómenos "extraños"; por ejemplo, que un subconjunto en un conjunto ordenado tenga dos distintos elementos maximales, necesitamos construir un modelo, es decir, un conjunto ordenado con tal propiedad. Un posible modelo es $(\mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq)$ con el subconjunto $X = \mathcal{P}(\{0,1\}) \setminus \{\{0,1\}\}$. En este modelo, $\{0\}$ y $\{1\}$ son distintos elementos $\subseteq$-maximales de X. Por otra parte, podemos demostrar que dentro de la teoría del orden con el Axioma de Linealidad esto es imposible; así que la teoría del orden con linealidad es distinta de la teoría del orden.

Lo anterior es un ejemplo burdo de cómo se procedería para construir modelos para la Teoría de Conjuntos[3]. La técnica para construir tales modelos queda fuera de nuestro alcance, pero es posible tener una idea, al menos intuitiva, de lo que significan los siguientes enunciados.

1. Hay un modelo de ZF en el cual existe un conjunto infinito de números reales sin un subconjunto numerable.
2. Hay un modelo de ZF en el cual existe un conjunto de números reales y un punto de la clausura para el cual no existen sucesiones (en el conjunto) convergentes a dicho punto.
3. Hay un modelo de ZF tal que los números reales son unión a lo más numerable de conjuntos a lo más numerables.
4. Hay un modelo de ZF en el que existe un espacio vectorial sin base.
5. Hay un modelo de ZF en el cual todo conjunto de números reales es medible según Lebesgue.

[3]El Ejercicio 9.3.8 proporciona un modelo de ZF sin el Axioma de Infinitud.