$\mathbb{R}$ COMO ESPACIO VECTORIAL

CARLOS EDUARDO CERVANTES TLATEMPA, ALEXIS CHÁVEZ CORTÉS,
AND FERNANDO HERNÁNDEZ-HERNÁNDEZ

Resumen. En esta nota recopilamos algunos hechos y aplicaciones de las bases de Hamel de espacios como el conjunto de números reales sobre el campo de los números racionales, así como en espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$. Estudiamos construcciones de bases de Hamel con propiedades específicas, y exploramos su abundancia en $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Además, discutimos resultados relevantes, como un teorema de Erdös y Kakutani, y se incluye un apéndice que complementa la demostración de dicho teorema.

1. Introducción

Obviamente la primera estructura interesante que conocemos referente a las matemáticas es el sistema de los números reales; muchos creemos infantilmente llegar a conocerlo en los primeros años. Debe pasar algún tiempo para darse de cuenta todo lo que en verdad desconocemos de los números reales, $\mathbb{R}$. La segunda estructura importante que conocemos es la de un espacio vectorial —por cierto muy ligada a los números reales. Los cursos elementales de álgebra lineal están enfocados principalmente en espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo de los números reales (o los números complejos, $\mathbb{C}$). Pocas veces se nos habla de un espacio concreto de dimensión infinita sobre un campo diferente: los reales, $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre el campo de los números racionales, $\mathbb{Q}$.

En esta nota, presentamos algunos aspectos que consideramos interesantes sobre el hecho de que los números reales son un espacio vectorial sobre los números racionales. Todos los resultados presentados aparecen en uno u otro lugar de los textos que están al final en la bibliografía. La segunda sección empieza de manera muy elemental, presenta algunas aplicaciones inmediatas y diferentes bases algebraicas para los reales como espacio vectorial sobre los racionales; es decir, bases con diferentes propiedades comunes en el estudio topológico o analítico. La tercera sección trata bases algebraicas para otros espacios vectoriales. En la cuarta sección presentamos una base algebraica de un popular espacio que es incluso conexa. También se incluye un Apéndice que complementa el teorema de Erdös y Kakutani, teorema 2.6.

Hemos tratado de hacer esta nota autocontenida en su mayor parte, del lector solamente suponemos cierta madurez matemática y conocimientos básicos de álgebra lineal, cálculo, topología y los principales aspectos de teoría de conjuntos. Nuestra notación es la usual a la de textos que tratan con nociones topológico conjuntistas. Por ejemplo, nosotros denotamos al conjunto de los números naturales indistintamente por $\mathbb{N}$ o por el símbolo del primer ordinal infinito, ω. Para nosotros los números ordinales son conjuntos bien ordenados cuyos elementos son los números ordinales más pequeños. Con esta idea en mente, se puede pensar que la Hipótesis del Continuo es la afirmación de que existe una biyección (y por lo tanto una enumeración) entre $\mathbb{R}$ y ω_1, el primer ordinal no numerable. En otras palabras, CH dice que es posible considerar una enumeración $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de $\mathbb{R}$, de modo tal que para cada $\beta < \omega_1$ se tiene que $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ es un conjunto numerable (o sea, biyectable con $\mathbb{N}$). Como es usual, la cardinalidad de un conjunto X se denota mediante el símbolo $|X|$. De particular importancia son la cardinalidad de los números naturales, $\aleph_0$, y la cardinalidad

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E05, 03E10, 03E35, 03E35, 03E55.

Key words and phrases. Espacio vectorial, base de Hamel, espacio de Banach, CH.

de los números reales, $\mathfrak{c}$. También se emplea, como corrientemente pasa, al mismo ω para denotar la cardinalidad de conjuntos numerables. De hecho, consideramos que los números cardinales son los números ordinales iniciales; por ejemplo, $\mathfrak{c}$ es el número ordinal con la cardinalidad del continuo y con la propiedad de ser un conjunto bien ordenado, de modo que sus segmentos iniciales tienen cardinalidad estrictamente menor que $\mathfrak{c}$. En la introducción de [He1] se puede ampliar más esta introducción sobre ω_1, $\mathfrak{c}$ y $\mathbb{R}$. Se puede también estudiar más a detalle en [Her].

Si A es un conjunto infinito, entonces la familia de todos los subconjuntos finitos de A se denota mediante el símbolo $[A]^{<\omega}$; mientras que la colección de todas las sucesiones finitas de términos en A se denota por $A^{<\omega}$. Una propiedad interesante es que siendo A un conjunto infinito, se tiene que $|A| = |\,[A]^{<\omega}\,|$. Cuando X es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ y $A \subseteq X$, entonces $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(A)$ (o simplemente $\operatorname{span}(A)$, si $\mathbb{K}$ es claro a partir del contexto) denota el conjunto de todos los vectores que pueden obtenerse como combinaciones lineales (finitas) de elementos de A y escalares sobre el campo $\mathbb{K}$.

Además, si L es un subespacio lineal de X entonces $\operatorname{codim} L$ denota la codimensión (posiblemente finita) de L en X. Se tiene que $\operatorname{codim} L = \kappa$ si y sólo si alguna base H de X tiene un subconjunto H' con $\operatorname{span}(H') = L$ y $|H \setminus H'| = \kappa$.

A lo largo del texto, usamos notación comúnmente encontrada en textos similares a este. Todas las nociones no definidas explícitamente aquí pueden encontrarse en [Lan], [Her], [HI], [He1] o [Kre]. También invitamos al lector a consultar [Rio].

2. $\mathbb{R}$ tiene dimensión infinita sobre $\mathbb{Q}$

Como es bien sabido, si F es un campo, entonces un *espacio vectorial* sobre F es un conjunto V, con una operación binaria (suma) que lo convierte en un grupo abeliano; es decir, V tiene un elemento distinguido $0 \in V$ tal que $0 + v = v$, para todo $v \in V$; cada $v \in V$ tiene un inverso aditivo que denotamos por $-v$, la operación es asociativa y conmutativa. Además hay una *multiplicación por escalar*; o sea, hay una función con dominio $F \times V$ y rango contenido en V; o sea que es una función, $\langle s, v\rangle \mapsto s \cdot v \in V$, la cual tiene las siguientes propiedades para cualesquiera $v, w \in V$ y cualesquiera $s, t \in F$: $1_F \cdot v = v$, $(s \cdot t) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$, $s \cdot (v + w) = s \cdot v + s \cdot w$ y $(s + t) \cdot v = s \cdot v + t \cdot v$. Entonces es muy fácil convencerse de que si tomamos a $F = \mathbb{Q}$ y a $V = \mathbb{R}$, obtenemos un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. También, si tomamos a $F = \mathbb{R}$, claramente $V = \mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ que tiene dimensión 1.

Consideremos ahora al grupo $(\mathbb{R}^+, \boxplus)$ de los números reales positivos utilizando la multiplicación usual de los reales como su operación aditiva; o sea, para $v, u \in \mathbb{R}^+$, $v \boxplus u = v \cdot u$. Entonces, $\mathbb{R}^+$ con la multiplicación por escalar definida como la exponenciación a una potencia $c \in \mathbb{R}$: $c \boxdot v = v^c$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Veamos que, de hecho, tiene dimensión 1 y es por tanto isomorfo a $\mathbb{R}$ como espacios vectoriales (Corolario 4.3, Capítulo 3 de [Lan]). Escojamos cualquier número real positivo, digamos $2 \in \mathbb{R}^+$. Si $x \in \mathbb{R}^+$ es cualquiera, podemos hallar un escalar $c \in \mathbb{R}$ tal que $x = c \boxdot 2 = 2^c$. Claramente, $c = \log_2 x$ es el escalar deseado. Así que $\{2\}$ genera a $\mathbb{R}^+$, por lo que $\{2\}$ es una base para $\mathbb{R}^+$. Más aún, note que por las propiedades del logaritmo (teorema 1, capítulo 18, [Spi]), $\log_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Como primer instancia para mostrar enormes diferencias a lo acostumbrado en los cursos elementales de álgebra lineal, probaremos que la dimensión de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es infinita. Supongamos lo contrario, digamos que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = n$, para algún $n \in \omega$. Consideremos el número de Euler, e, y el conjunto $\{1, e, e^2, \ldots, e^n\}$ que es linealmente dependiente (teorema 5.1, capítulo 3, [Lan]). Así existen números racionales (algunos distintos de cero) $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, tales que

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0.$$

Pero se sabe que e es un número trascendental (teorema 2.1, capítulo 2, [PS]). Así tenemos que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \neq n$ para todo $n \in \omega$. Por lo tanto el espacio vectorial de números reales sobre el campo de los números racionales no es de dimensión finita.

Ahora probaremos que la dimensión de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es de hecho la máxima posible, $\mathfrak{c}$. Para ello considere una familia casi ajena $\mathscr{A}$ de subconjuntos infinitos de números naturales que tenga cardinalidad $|\mathscr{A}| = \mathfrak{c}$. [1] Recuerde que $\wp(\omega)$ es biyectable con 2^ω mediante las funciones características,

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \notin A, \\ 1, & \text{si } n \in A, \end{cases}$$

para cada $n \in \omega$. Ahora definamos para cada $A \in \wp(\omega)$, la función $\varphi : \wp(\omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(A) = x_A := \sum_{n\in\omega} \frac{\chi_A(n)}{2^{n+1}}.$$

Note que x_A es racional si y sólo si A es o bien finito o co-finito (i.e. con complemento finito). Si consideramos dos elementos cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$, entonces x_A y x_B son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes, pues ambos son irracionales y cualquier combinación $\mathbb{Q}$-lineal de ellos será nuevamente irracional. De este modo, $\{x_A : A \in \mathscr{A}\}$ es un conjunto $\mathbb{Q}$-linealmente independiente de tamaño $\mathfrak{c}$.

El matemático alemán Georg Hamel, en 1905, publicó un artículo titulado «Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$»(«Una base de todos los números y las soluciones discontinuas de la ecuación funcional $f(x + y) = f(x) + f(y)$»), donde introdujo formalmente el concepto de lo que hoy se conoce como base de Hamel. En su artículo, Hamel mostró que cualquier espacio vectorial tiene una base, siempre y cuando se acepte el Axioma de Elección, un principio fundamental tanto para la teoría de conjuntos como para muchas otras ramas de las matemáticas. Algunas equivalencias del Axioma de Elección son el Lema de Kuratowski-Zorn y teorema del Buen Orden, el teorema de Tychonoff para el producto de espacios compactos, etc. También se demostró que el hecho de que todo espacio vectorial tenga una base de Hamel es igualmente equivalente al Axioma de Elección. Sin embargo, que $\mathbb{R}$ tenga una base de Hamel como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es una afirmación más débil que el Axioma de Elección. Por ejemplo, es relativamente consistente ZF más el Axioma de Elecciones Dependientes más el hecho de que $\mathbb{R}$ tenga una base de Hamel sobre $\mathbb{Q}$; pero que aún así $\mathbb{R}$ no tenga un buen orden. Remitimos al lector interesado en esta afirmación a [SWY].

Como una primera aplicación trivial del hecho de que existe una base de Hamel para $\mathbb{R}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$; observe que $\mathbb{R}^2$ también puede considerarse como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y que obviamente tendrá la misma dimensión que $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. El mismo teorema que aparece en el libro de Lang [Lan] y que ya fue antes referido, es también válido para dimensiones infinitas; es decir: dos espacios vectoriales son isomorfos (como espacios vectoriales —y por tanto como grupos) si y sólo si tienen la misma dimensión. Por eso, como espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}$, los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son isomorfos. De aquí se deduce que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son isomorfos como grupos aditivos. Además esto no es exclusivo de $n = 2$, en realidad el mismo método demuestra que todos los grupos $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, son isomorfos como grupos aditivos.

Esto nos lleva a considerar subgrupos especiales dentro de $\mathbb{R}$ y a explorar la riqueza de la estructura algebraica que generan en relación con $\mathbb{R}$. En particular, mencionaremos los subgrupos complementarios: un subgrupo S de $\mathbb{R}$ se dice *complementario* a $\mathbb{Q}$ si S contiene exactamente un elemento de cada clase lateral de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Es decir, S es complementario a $\mathbb{Q}$ si y sólo si cada $x \in \mathbb{R}$

[1] Recuerde que una familia de subconjuntos infinitos de números naturales es casi ajena si la intersección de cualesquiera dos de sus miembros es finita. Para conseguir una familia casi ajena de $\mathfrak{c}$ subconjuntos de números naturales, considere, por ejemplo, una biyección entre los naturales y $\mathbb{Q}$, para cada número real $x \in \mathbb{R}$ una sucesión (inyectiva) de números racionales $\langle q_n^x : n \in \omega \rangle$ que converja a x.

puede escribirse de manera única como $s+q$ para algún $s \in S$ y $q \in \mathbb{Q}$. Desde el punto de vista de la teoría de grupos, esto es equivalente a decir que $\mathbb{R}$ es la suma directa interna de S y $\mathbb{Q}$.

Esto está íntimamente relacionado con las bases de Hamel para $\mathbb{R}$, ya que su existencia implica que podemos descomponer $\mathbb{R}$ en clases laterales de $\mathbb{Q}$ y así obtener un subgrupo complementario.

Antes de adentrarnos en la teoría, veamos algo práctico sobre las bases de Hamel.

Ejemplo 2.1. [Gro] Sea $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [0,1]$ con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $n \geq 3$. Consideremos las distancias entre pares de elementos de S. Si cada distancia que aparece, excepto la distancia 1, ocurre al menos dos veces, entonces S está compuesto únicamente por números racionales.

En efecto, suponga que no es así y considere a H, una base de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Entonces, para cada elemento $x_k \in S$ tenemos:

$$x_k = \sum_{i \leq m} q_{k,i} \cdot h_i,$$

donde $q_{k,i} \in \mathbb{Q}$ y $h_i \in H$, para todo $i \leq m$ (Aquí m es un natural suficientemente grande de modo que cada vector x_k, para $k \leq n$, pueda expresarse como única combinación lineal de longitud a lo más m). Entonces debido a la suposición, existen $h_i \notin \mathbb{Q}$ y $q_{k,i} \neq 0$. Denotemos $\Lambda = \{q_{k,i} : k \leq n\}$. Note que $0 \in \Lambda$ ya que $x_0 = 0$. Definamos $\breve{q} = \min \Lambda$ al igual que $\widehat{q} = \max \Lambda$. Es imposible que $\breve{q} = \widehat{q}$ ya que entonces tendríamos $\breve{q} = \widehat{q} = 0$ y $\Lambda = \{0\}$. Por lo tanto, $\breve{q} < \widehat{q}$.

Tomemos los siguientes conjuntos:

$$\widehat{X} = \{x_k : q_{k,i} = \widehat{q} \ \wedge \ 0 \leq k \leq n\} \quad \text{y} \quad \breve{X} = \{x_k : q_{k,i} = \breve{q} \ \wedge \ 0 \leq k \leq n\}.$$

Sean $x \in \widehat{X}$ y $y \in \breve{X}$. Entonces, de acuerdo con la condición inicial (ya que al menos uno no es racional), existen x_r, x_s con $0 \leq r, s \leq n$ tales que $x - y = x_r - x_s$ y $\{x, y\} \neq \{x_r, x_s\}$. Esto significa que $\widehat{q} - \breve{q} = q_{r,i} - q_{s,i}$, lo que implica $q_{r,i} = \widehat{q}$ y $q_{s,i} = \breve{q}$; es decir, $x_r \in \widehat{X}$ y $x_s \in \breve{X}$.

Ahora, basta tomar $x = \max \widehat{X}$ y $y = \min \breve{X}$ y obtener una contradicción, ya que esto implica que $x_r = x$, $x_s = y$ y $\{x, y\} = \{x_r, x_s\}$.

Esta sección también está dedicada a construir algunas bases de Hamel con diversos tipos de propiedades, algunas muy interesantes, como la de ser cerradas bajo potencias enteras: ¡no sólo positivas!

Teorema 2.2. *Existe una base de Hamel H para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que*

$$(h \in H) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{Z})(h^n \in H).$$

Demostración. Primero, introduciremos alguna notación de interés. Si $M \subseteq \mathbb{R}$, $F(M)$ es el campo generado por M, $A(M)$ es el conjunto de números algebraicos sobre M. Es claro que si $|M| < \mathfrak{c}$, entonces también $|F(M)| < \mathfrak{c}$ y $|A(M)| < \mathfrak{c}$.

Sea $\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, con $r_0 = 1$, una enumeración. Por recursión se construirán sucesiones transfinitas de números reales $\{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y $\{z_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ con las propiedades siguientes:

Si $H_\alpha = \{y_\xi^k : k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ \xi \leq \alpha\} \cup \{z_\xi^k : k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ \xi \leq \alpha\}$, entonces para cada $\alpha < \mathfrak{c}$:

2.1 H_α es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente,

2.2 $(\forall \xi \leq \alpha)(r_\xi \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(H_\alpha))$.

Haga $y_0 = z_0 = 1$; entonces $H_0 = \{1\}$ satisface 2.1 y 2.2. Suponga que para $\beta < \mathfrak{c}$ se han definido $\{y_\xi : \xi < \beta\}$ y $\{z_\xi : \xi < \beta\}$ de modo que 2.1 y 2.2 se cumplen para cada $\alpha < \beta$. Sea r_γ el primer elemento tal que $r_\gamma \notin L_\beta := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\bigcup\{H_\alpha : \alpha < \beta\})$. Por 2.2, $\beta \leq \gamma$; además, como L_β tiene tamaño menor que $\mathfrak{c}$, existe y_β trascendente sobre $B_\beta = F(L_\beta \cup \{r_\gamma\})$; defina $z_\beta = r_\gamma - y_\beta$. Ahora, es claro que 2.2 se cumple para H_β.

Si H_β no es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente, existen $h_0, h_1, \ldots, h_m \in \bigcup\{H_\alpha : \alpha < \beta\}$ y racionales $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Q}$; además de polinomios $p_i, q_i \in \mathbb{Q}[x]$, con $i \in \{0,1\}$, de modo que, haciendo

$y = y_\beta, z = z_\beta$, se tiene

$$(*) \qquad p_0(y) + p_1(z) + q_0(^1/_y) + q_1(^1/_z) + \sum_{j=0}^{m} s_j h_j = 0.$$

Pongamos $k_i = \deg(q_i)$, $i \in \{0,1\}$, y multiplique $(*)$ por $y^{k_0} z^{k_1}$ para obtener:

$$(p_0(y) + p_1(z) + d)y^{k_0} z^{k_1} + \widetilde{q}_0(y) z^{k_1} + \widetilde{q}_1(z) y^{k_0} = 0,$$

donde $d \in L_\beta$; o bien[2]

$$z^{k_1} \widetilde{q}_0(y) = -(p_0(y) + p_1(z) + d) y^{k_0} z^{k_1} - y^{k_0} \widetilde{q}_1(z).$$

Note que, $\widetilde{q}_0(y) \neq 0$ puesto que y es trascendente sobre $A_\beta = F(L_\beta)$; además y^{k_0} divide a $(p_0(y)+p_1(z)+d)y^{k_0}z^{k_1}$ y también divide a $y^{k_0}q_1(z)$, por lo que divide a su resta. Pero y^{k_0} no divide a z^{k_1}, entonces y^{k_0} divide a $\widetilde{q}_0(y)$ sobre A_β. Más aún, como $\widetilde{q}_0 \in \mathbb{Q}[x]$, pues $\widetilde{q}_0(y) = q_0(^1/_y)y^{k_0}$, entonces y^{k_0} divide a $\widetilde{q}_0$ sobre $\mathbb{Q}$, y como $\deg(\widetilde{q}_0) \leq k_0$ se sigue que

$$\widetilde{q}_0(x) = a_0 x^{k_0}.$$

donde $a_0 \in \mathbb{Q}$. Así, $q_0(x)$ es un polinomio constante.

Análogamente se obtiene que $q_1(x)$ es constante, y $(*)$ se convierte en

$$(**) \qquad p_0(y) + p_1(z) + d' = 0,$$

con $d' \in L_\beta$.

Como y es trascendente sobre B_β, $\deg(p_0) = \deg(p_1) = m$. Suponga que $m > 0$, y escriba

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} x^j.$$

donde $i \in \{0,1\}$, cada $a_{i,j} \in \mathbb{Q}$, y $a_{i,m} \neq 0$. El lado izquierdo de la ecuación $(**)$ se puede reescribir como

$$b_0 + b_1 y + \ldots + b_m y^m.$$

con cada $b_i \in L_\beta$. Entonces, en particular se tiene que $b_{m-1} = 0$. Si $m > 1$, entonces $b_{m-1} = a_{0,m-1} \pm (m r_\gamma a_{1,m} + a_{2,m-1}) = 0$, y de esta manera, $r_\gamma \mathbb{Q}$, lo que es imposible. Y si $m = 1$, se tiene que $b_0 = d + a_{0,0} + a_{1,0} r_\gamma = 0$; o sea que $r_\gamma \in L_\beta$, contrario a su definición.

Así que $m = 0$, y de $(*)$ se sigue que $\bigcup\{H_\alpha : \alpha < \beta\}$ es un subconjunto $\mathbb{Q}$-linealmente dependiente, contradiciendo la condición (2.1). Por tanto, H_β es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente. Y de esta forma, $H = \bigcup\{H_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ es una base para $\mathbb{R}$ que cumple lo requerido. ❒

Sería natural buscar bases de Hamel cerradas bajo otras operaciones aritméticas. Lamentablemente en [Mab] se muestra que no existen bases de Hamel cerradas bajo producto.

Las bases de Hamel son subconjuntos extraños de los números reales; en los siguientes resultados se verá que ellas están presentes en todo subconjunto abierto y también en los conjuntos perfectos (*id est*, cerrados sin puntos aislados). Para más información sobre subconjuntos especiales de $\mathbb{R}$ se puede consultar [FHM] o muchas otras fuentes alternativas.

Teorema 2.3. *Todo subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$ contiene una base de Hamel.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$, y H una base de Hamel.

Entonces existen $s, t \in \mathbb{Q}$ con $s < t$ tales que $(s,t) \subseteq U$ y, tomemos $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $r < {}^1/_3(t-s)$. Para cada $h \in H$, existe un $z_h \in \mathbb{Z}$ tal que $z_h r \leqslant h < (z_h + 1)\, r$.

[2] Observe que $\widetilde{q}_i$ es básicamente q_i; aunque como polinomios están "al revés".

Definimos el siguiente conjunto $J = \{h - (z_h + 1)\, r : h \in H\} \cup \{{}^{-r}/_2\}$ y, para todo $h \in H$, pongamos $j_h = h - (z_h + 1)\, r$; por lo que tenemos $h = j_h - 2\,(z_h + 1)\,({}^{-r}/_2) \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(J)$, ya que $j_h, {}^{-r}/_2 \in J$ y $-2\,(z_h + 1) \in \mathbb{Q}$.

Por lo tanto $H \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(J)$ y así $\mathbb{R} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(H) \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(J)$, obtenemos que J contiene una base de Hamel G para $\mathbb{R}$.

Definimos el siguiente conjunto:

$$I = \big\{{}^1/_2(s+t)\big\} \cup \big\{g + {}^1/_2(s+t) : g \in G\big\}.$$

Notemos que $g = (g + {}^1/_2(s+t)) - {}^1/_2(s+t) \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(I)$ para cualquier $g \in G$ y así $G \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(I)$. Por lo tanto, $\mathbb{R} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(G) \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(I)$, obtenemos que I contiene una base de Hamel L para $\mathbb{R}$.

Para todo $h \in H$ tenemos $z_h r \leqslant h < (z_h+1)r$, y restando $(z_h+1)r$ en cada desigualdad obtenemos $z_h r - (z_h + 1)r \leqslant h - (z_h + 1)r < 0$. Por lo tanto $-r \leqslant j_h < 0$, así que $G \subseteq J \subseteq [-r, 0)$.

Para todo $g \in G$, tenemos:

$$\begin{aligned} g + {}^1/_2(s+t) &\in \big[-r + {}^1/_2(s+t), {}^1/_2(s+t)\big) \\ &\subseteq \big[-{}^1/_3(t-s) + {}^1/_2(s+t), {}^1/_2(s+t)\big) \\ &= \big[{}^5/_6(-s+t), {}^1/_2(s+t)\big) \subseteq (s,t). \end{aligned}$$

Así obtenemos que $L \subseteq I \subseteq (s,t)$ y por tanto U contiene la base de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. ❒

Con este resultado vemos que las bases de Hamel no son subconjuntos tan raros en $\mathbb{R}$. De hecho, hasta conjuntos con interior vacío pueden contener una, como veremos ahora.

Teorema 2.4. *El conjunto de Cantor contiene una base de Hamel para* $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor, consistente de los números $0, 1$ y todos los $x \in (0,1)$ cuya representación ternaria no incluye 1 o que no termina en una sucesión infinita de 2.

Sea $x \in [0,1]$ y considere su representación ternaria $x = (0.d_1 d_2 \ldots)_3$. Para cada $n \in \omega$ defina:

$$a_n = \begin{cases} d_n, & \text{si } d_n \neq 1, \\ 0, & \text{si } d_n = 1, \end{cases} \quad y \quad b_n = \begin{cases} 0, & \text{si } d_n \neq 1, \\ 2, & \text{si } d_n = 1. \end{cases}$$

Sean $a, b \in [0,1]$ tales que $a = (0.a_1 a_2 \ldots)_3$ y $b = (0.b_1 b_2 \ldots)_3$. Note que $a, b \in \mathcal{C}$ y además $x = a + {}^1/_2 b$. Por lo que x se representó como una combinación $\mathbb{Q}$-lineal de elementos en $\mathcal{C}$.

Ahora considere $y \in \mathbb{R}$ y note que existe $n_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que ${}^y/_{n_0} \in [0,1]$. Por lo anterior, existen a_y y b_y tales que $y = n_0(a_y + {}^1/_2 b_y)$. Así, $\mathcal{C}$ contiene una base de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. ❒

Se deduce inmediatamente que la base hallada en el resultado anterior es un subconjunto medible según Lebesgue. Vale preguntarse también si existirán bases de Hamel que sean conjuntos de Borel, o conjuntos analíticos. Recuerde que la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a los intervalos abiertos, y que un subconjunto de $\mathbb{R}$ se dice analítico si es la imagen continua de un subconjunto de Borel. Resulta que las bases de Hamel para $\mathbb{R}$ no pueden ser conjuntos de esos dos tipos. Antes de probarlo veamos lo siguiente:

Sea H una base de Hamel para $\mathbb{R}$, enumerada como $H = \{h_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y, sin pérdida de generalidad, suponga que $h_0 = 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $a_\alpha(x)$ el coeficiente de h_α en su representación como combinación lineal de elementos de H. Para $r \in \mathbb{Q}$, defina

$$A_r = \{x \in \mathbb{R} : a_0(x) = r\}.$$

Note que $A_r = A_0 + r$, $A_r \cap A_s = \emptyset$ si $r \neq s$, y que $\bigcup\{A_r : r \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$.

Si A_0 fuera medible según Lebesgue, también lo sería cada A_r, y como $\bigcup\{A_r : r \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$, al menos uno de los conjuntos A_r, y por lo tanto A_0, debe tener medida positiva. Se sigue que el conjunto $A_0 - A_0 = \{x - y : x, y \in A_0\}$ contiene un intervalo abierto alrededor del 0 (véase [Str]). Por lo que, debido a la densidad de $\mathbb{Q}$, existen $x, y \in A_0$ con $x - y \neq 0$ y tales que $x - y \in \mathbb{Q}$.

Pero $a_0(x) = a_0(y) = 0$, y entonces tanto x como y son irracionales, una contradicción. Así que el conjunto A_0 no puede ser medible según Lebesgue.

Con esto en cuenta, probemos el siguiente resultado:

Teorema 2.5. *Si H es una base de Hamel para $\mathbb{R}$, entonces H no puede ser un conjunto de Borel ni puede ser un conjunto analítico.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponga que $1 \in H$. Sea $K = H \setminus \{1\}$.

Para cada $n \in \omega$ y cada $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}$, defina $f_{\mathbf{r}} : K^{n+1} \to \mathbb{R}$ por:

$$f_{\mathbf{r}}(k_0, k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i \leq n} r_i k_i.$$

Claro que $f_{\mathbf{r}}$ es una función continua, para cada $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}$. Si H es un conjunto de Borel o analítico, entonces K y K^{n+1} también lo son. Y por tanto, para cada $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}$, $f_{\mathbf{r}}[K^{n+1}]$ es un conjunto analítico.

Del hecho que H es una base de Hamel, y de que $1 \notin K$, se sigue que

$$A_0 = \bigcup \{f_{\mathbf{r}}[K^{n+1}] : n \in \omega \ \wedge \ \mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}\}.$$

Por lo que A_0 es un conjunto analítico y entonces es medible según Lebesgue, contrario a lo que se mostró anteriormente. ❐

Más aún, es posible construir una partición de $\mathbb{R}$ que consista de subconjuntos $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Esta afirmación puede encontrarse, bajo una obvia modificación, dentro de la demostración del siguiente resultado que presentamos.

Teorema 2.6 (Erdös-Kakutani)**.** CH *equivale a la afirmación: Existe una familia numerable $\{H_n : n \in \omega\}$ de bases de Hamel para $\mathbb{R}$ de modo que*

$$\bigcup \{H_n : n \in \omega\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Demostración. Suponga primero que H es una base ordenada de Hamel para $\mathbb{R}$ definida por

$$H = \{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere su expresión única como combinación lineal

$$x = \sum_{i=0}^{n} q_i h_{\alpha_i},$$

donde $n \in \omega$ y $q_i \in \mathbb{Q}$ para cada $i \leq n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \omega_1$.

Dado un subconjunto finito de $\mathbb{Q}$, $A \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$, suponga que $A = \{r_k : k \leq n\}$, con $n \in \omega$. Defínase al subconjunto $R_A \subseteq \mathbb{R}$ por

$$x \in R_A \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sum_{k=0}^{n} r_k h_{\alpha_k}.$$

Luego, $\mathbb{R} = \{0\} \cup \bigcup \{R_A : A \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}\}$. Por lo que basta probar la afirmación para cada R_A. Tome cualquier $\alpha < \omega_1$, y sea $R_A^\alpha \subseteq R_A$ definido como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = r_0 h_{\alpha_0} + \cdots + r_n h_{\alpha_n},$$

donde $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \alpha_n(x) = \alpha$.

Note que, como α es numerable, sólo se pueden tomar una cantidad numerable de ordinales menores a α, por lo que R_A^α es un subconjunto numerable. Escriba $R_A^\alpha = \{x_{A,m}^\alpha : m \in \omega\}$. Para cada $m \in \omega$, defina

$$S_{A,m} = \{x_{A,m}^\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Observe que el conjunto $S_{A,m}$ selecciona el m-ésimo elemento de cada R_A^α, por lo que si $x, y \in S_{A,m}$ son distintos, entonces $\alpha_n(x) \neq \alpha_n(y)$. Es claro también que $R_A = \bigcup_{m\in\omega} S_{A,m}$.

Veamos que cada conjunto $S_{A,m}$ es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente.

En efecto, si $S_{A,m}$ no lo fuera, existen $k \in \omega$, $x_i \in S_{A,m}$ y $p_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, para cada $i \leq k$, tales que

$$(❉) \qquad \sum_{i\leq k} p_i x_i = 0.$$

Puesto que, para cada $i \leq k$, $x_i = r_0 h_{\alpha_{i,0}} + \cdots + r_n h_{\alpha_{i,n}}$; entonces (❉) adquiere la forma:

$$(\star) \qquad \sum_{i\leq k}\sum_{j\leq n} p_i r_j h_{\alpha_{i,j}} = 0.$$

Por lo que existe $i_0 \leq k$ tal que $\alpha^* = \alpha_n(x_{i_0}) > \alpha_n(x_i)$, para cada $i \leq k$, $i \neq i_0$. Así, el término con h_{α^*} en la ecuación ($\star$) no se cancela, pues aparece una única vez, una contradicción.

Luego para cada $S_{A,m}$ tomamos una extensión $\widetilde{S}_{A,m}$ a una base de Hamel. De esta forma, cada R_A se descompone en una cantidad numerable de subconjuntos que son bases de Hamel, y en consecuencia CH implica la afirmación del enunciado.

Por el contrario, supongamos que la afirmación del enunciado es verdadera, probaremos la Hipótesis del Continuo a partir de ella. Lo haremos mostrando que, bajo la suposición, la gráfica completa de tamaño $2^{\aleph_0}$ es la unión de una cantidad numerable de árboles (véase teorema 5.3).

Sea $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\omega} M_n$ una descomposición del conjunto de todos los números reales en una cantidad numerable de conjuntos, cada uno de los cuales consta de números $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Podemos suponer que M_0 tiene tamaño $2^{\aleph_0}$ por el teorema de König (véase por ejemplo [Her], p. 245).

Sea G una gráfica completa de número cardinal $2^{\aleph_0}$, la podemos tomar como sigue:

$$G = \{(x, y) : x, y \in M_0 \ \wedge \ x < y\}.$$

Tomemos los siguientes conjuntos: $G_n = \{(x, y) : x < y \ \wedge \ y - x \in M_n\}$. Claramente tenemos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Veamos que cada G_n es un árbol, para esto supongamos que G_n contiene un polígono cerrado. Sean $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = x_1$ los vértices de este polígono. Entonces tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k} \pm |x_i - x_{i+1}| = 0.$$

Por construcción tenemos que para cada $i \leq k$, $x_i \in M_0$ y además $|x_i - x_{i+1}| \in M_n$. Así se tiene que todos los números $|x_i - x_{i+1}|$ son distintos. Pero esto es una contradicción, ya que M_n consiste de números $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Por lo tanto, la afirmación del enunciado implica CH. ❒

3. Otras bases en espacios de Banach

El conjunto de números reales no es simplemente un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$; por lo aprendido en cursos elementales sobre las propiedades del valor absoluto, $|\cdot|$, sabemos que de hecho él define una métrica que es completa; no llega a ser una norma completa pues $\mathbb{Q}$ no es completo. Así, $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ tiene estructura parecida a la de espacio de Banach. Recuerde que una *norma* en un espacio vectorial X (sobre $\mathbb{R}$) es una función $\|\cdot\|$ de X en $\mathbb{R}$ tal que para cada $x \in X$, $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si x es el elemento neutro respecto de la suma en X, para todo $x \in X$ y todo $c \in F$ se cumple $\|cx\| = |c|\|x\|$, y para cualesquiera $x, y \in X$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Es un ejercicio rutinario demostrar que toda norma sobre X induce una métrica para X. Un espacio normado que es completo (como espacio métrico) se denomina *espacio de Banach*. Cabe resaltar que en un espacio normado confluyen dos estructuras de diversa naturaleza: una algebraica, la de espacio vectorial, y una topológica como espacio métrico.

Ligando esta sección a lo que anteriormente se ha tratado, y como aplicación del bien conocido teorema de Categorías de Baire, estudiaremos la cardinalidad de una base de Hamel para un espacio de Banach.

Proposición 3.1. *En un espacio de Banach de dimensión infinita, ninguna base de Hamel es numerable.*

Demostración. Considere X, un espacio como en la hipótesis, y suponga que tiene una base de Hamel numerable, a saber $H = \{h_n : n \in \omega\}$.

Note que entonces $X = \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{span}(\{h_k : k \leq n\})$. O sea que X es la unión numerable de subespacios propios de dimensión finita.

Pero se sabe que todo subespacio propio de un espacio normado tiene interior vacío, y que los subespacios de dimensión finita de un espacio de Banach son conjuntos cerrados (teoremas 7.1.2 y 7.4.3 de [Iri]). De esta manera se tiene que X es magro, lo que es absurdo por el teorema de Baire. Así que X no tiene dimensión numerable. ❒

Es interesante entonces notar que no hay espacios normados de dimensión numerable que sean completos. Fortaleceremos este primer resultado.

Note primero que X debe tener cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$, pues todo espacio normado es completamente regular, por ser métrico, y es fácilmente conexo por su estructura vectorial.

Proposición 3.2. *Si H es una base de Hamel para X, entonces* $|X| = \max\{\mathfrak{c}, |H|\}$.

Demostración. Como H es una base de Hamel para X, se tiene que $|X| = |[\mathbb{R}]^{<\omega} \times [H]^{<\omega}|$. Del hecho que para cualquier conjunto infinito A, $|[A]^{<\omega}| = |A|$ se sigue que $|X| = |\mathbb{R} \times H| = \max\{\mathfrak{c}, |H|\}$. ❒

Es interesante notar que de esta proposición se desprende que los espacios clásicos: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ℓ_2 así como todos los ℓ_p, para $p \in [1, \infty]$, son isomorfos como espacios vectoriales. El siguiente lema es de carácter puramente auxiliar, por lo que se omitirá su demostración, véase teorema 1.a.5 de [LT]. Recuerde que una sucesión de elementos de X es *básica* si todo elemento del subespacio cerrado generado por ella se puede representar por una única combinación lineal infinita de elementos de la sucesión.

Lema 3.3. *Todo espacio de Banach X de dimensión infinita admite una sucesión básica.*

Se sigue inmediatamente que si una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ es básica, entonces si$\{c_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión cualquiera de escalares, entonces $\sum_{n\in\omega} c_n x_n = 0$ implica que $c_n = 0$ para cada $n \in \omega$.

Ahora casi estamos listos para probar el siguiente resultado relevante; antes un breve recordatorio. Una familia $\mathfrak{I} \subseteq [\omega]^\omega$ se llama *familia independiente* si siempre que se tengan dos subfamilias $S, T \subseteq \mathfrak{I}$ finitas y disjuntas se cumple que

$$\bigcup_{X\in S} X \setminus \bigcup_{Y\in T} Y$$

es infinito. Existen familias independientes de tamaño $\mathfrak{c}$, originalmente eso fue publicado en [FK], actualmente las familias independientes son objetos combinatorios muy útiles; en [Lop] pueden encontrarse diversos métodos de construcción. A continuación usaremos una familia independiente para generar vectores linealmente independientes parecido a como se hizo en al inicio de la segunda sección donde se usó una familia casi ajena de subconjuntos de números naturales. Familias casi ajenas y familias independientes son conceptos combinatorios muy cercanos y aquí volvemos a ver su íntima relación.

Teorema 3.4. *Toda base de Hamel para un espacio de Banach de dimensión infinita X, tiene cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Suponga que $\{x_n : n \in \omega\}$ es una sucesión básica para X, sea $\mathcal{I}$ una familia independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y considere la función inyectiva $\zeta : \mathcal{I} \to X$ definida como

$$\zeta(Z) = \sum_{k\in\omega} \frac{\chi_Z(k)}{2^k} \cdot x_k;$$

donde χ_Z es la función característica de $Z \in \mathcal{I}$. Note que por construcción los vectores en $\{\zeta(Z) : Z \in \mathcal{I}\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$: en efecto, si se toman distintos $Z_0, \dots, Z_m \in \mathcal{I}$, entonces para cualquier $k \in \omega$ y para cada $i \leq m$ existe un $k' > k$ de modo que para todo $j \neq i$, $\chi_{Z_i}(k') \neq \chi_{Z_j}(k')$, de aquí que los vectores $\zeta(Z_0), \dots, \zeta(Z_m)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Para cada $y \in X$ existen únicos $h_{\alpha_0}, \dots, h_{\alpha_{n(y)}} \in H$ con $\alpha_j < \alpha_{j+1}$, y $s_0, \dots, s_{n(y)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de modo que $y = \sum_{j=0}^{n(y)} s_j h_{\alpha_j}$. Así que la función $\varphi : X \to [\mathbb{R}]^{<\omega} \times [H]^{<\omega}$ dada por

$$\varphi(y) = \Big((s_0, \dots, s_{n(y)}), (h_{\alpha_0}, \dots, h_{\alpha_{n(y)}})\Big)$$

es una biyección, y la composición $\varphi \circ \zeta : \mathcal{I} \to [\mathbb{R}]^{<\omega} \times [H]^{<\omega}$ es inyectiva. Por otro lado, ya que $|\mathcal{I}| = \mathfrak{c}$ y $|[H]^{<\omega}| < \mathfrak{c}$, por el principio de casillas existe un subconjunto infinito $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$ de modo que $p_2 \circ \varphi \circ \zeta : \mathcal{C} \to [H]^{<\omega}$ es constante (p_2 denota la proyección sobre la segunda coordenada).

Así, denote por $W_0 = \langle p_2 \circ \varphi \circ \zeta[\mathcal{C}] \rangle$ el correspondiente subespacio de dimensión finita. Y dado que ζ es inyectiva, $\zeta[\mathcal{C}] \subseteq W_0$ es un conjunto infinito de vectores linealmente independientes, lo que es una contradicción. ❒

Se deduce inmediatamente de estos dos previos resultados una propiedad muy útil y conveniente de las bases de Hamel en espacios de Banach de dimensión infinita.

Corolario 3.5. *Si H es una base de Hamel para un espacio de Banach X, entonces $|X| = |H|$.*

Continuamos esta sección con el siguiente resultado; nuevamente pone de manifiesto que el Axioma de Elección es necesario para establecer la propiedad de Baire en subconjuntos de $\mathbb{R}$. Recuerde que un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene la *propiedad de Baire* si su diferencia con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es pequeña en el sentido de la categoría; es decir, si $X \triangle U$ es un conjunto magro para algún $U \subseteq \mathbb{R}$ que es abierto.

Proposición 3.6. *Si todo subconjunto de los números reales tuviera la propiedad de Baire, entonces no existe una base de Hamel para $\mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que H es una base de Hamel, y sin pérdida de generalidad $1 \in H$. Si $\vec{q} = \langle q_0, \dots, q_n \rangle$ es una sucesión de números racionales, entonces sea:

$$A_{\vec{q}} = \Big\{x \in \mathbb{R} : (\exists \{h_1, \dots, h_n\} \subseteq H)\, (x = q_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i h_i)\Big\}.$$

Para algún $\vec{q} \in \mathbb{Q}^{<\omega}$, debe tenerse que $A_{\vec{q}}$ no es magro (de lo contrario, $\mathbb{R}$ sería magro). Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto y no vacío, tal que $A_{\vec{q}} \triangle U$ es magro. Elija $a, b, p \in \mathbb{R}$ tal que $p \neq 0$, $a + p < b$, y $(a, b + p) \subseteq U$. Entonces $(a, b) \setminus A_{\vec{q}}$ es magro; por lo tanto, $(a + p, b + p) \setminus (A_{\vec{q}} + p)$ también es magro, donde $A_{\vec{q}} + p$ es el desplazamiento $\{x + p : x \in A_{\vec{q}}\}$.

Sin embargo, si $x \in A_{\vec{q}} \cap (A_{\vec{q}} + p)$ se tiene que $x \in A_{\vec{q}}$ y $x - p \in A_{\vec{q}}$, pero su diferencia es racional (y distinta de cero), lo que no es posible. ❒

La anterior es básicamente la demostración de que un conjunto de Vitali no tiene la propiedad de Baire. Considerar la propiedad de Baire en espacios de Banach nos ofrece una forma simple de encontrar bases de Hamel que sean de cierto modo conjuntos "pequeños".

Teorema 3.7. *Sea H una base de Hamel para un espacio de Banach X. Si H tiene la propiedad de Baire, entonces H es un conjunto magro.*

Demostración. Suponga que H no es magro. Entonces existe un subconjunto abierto $U \neq \emptyset$ de modo que $U \triangle H$ es magro. Claro que $U \cap H \neq \emptyset$, pues X es espacio métrico completo. Sea $z \in U \cap H$ y considere $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ una sucesión convergente a z. Sin pérdida de generalidad suponga que cada x_n necesita al menos cuatro sumandos para su representación en la base H. [3]

Puesto que U es abierto y $x_n \to z$, hay $j \in \omega$ tal que $(z+U) \cap (x_j + U) \neq \emptyset$. Y como $z \in U \cap H$, se sigue que $(z+H) \cap (x_j + H) \neq \emptyset$. Así, hay $v \in X$ tal que $k + h = v = x_j + h'$, donde $h, h' \in H$. Entonces $x_j = z + h - h'$, contradiciendo que H sea base. ❐

La riqueza de los espacios de Banach es tal que incluso sin acudir a la propiedad de Baire se pueden obtener bases de Hamel que sean conjuntos "pequeños pero bien acomodados". Veamos el siguiente y más general resultado.

Teorema 3.8. *Existe una base de Hamel para un espacio de Banach X que es un conjunto denso y magro. Más aún, existe una base de Hamel que es un conjunto denso en ninguna parte.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una base para la topología de X con cardinalidad mínima κ. Se construirá un subconjunto linealmente independiente $H' = \{h_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de modo que $h_\alpha \in B_\alpha$ y $\|h_\alpha\| \in \mathbb{Q}$ para cada $\alpha < \kappa$.

Tome $h_0' \in X$ cualquiera y considere $h_0 = \frac{h_0'}{\|h_0'\|}$; puesto que existe algún $B \in \mathscr{B}$ de modo que $h_0 \in B$, sin pérdida de generalidad suponga que $B = B_0$. Asuma que para $\beta < \kappa$, ya se construyó el subconjunto linealmente independiente $H_\beta = \{h_\alpha : \alpha < \beta\}$. Ya que $\beta < \kappa$ y se sabe que $\kappa \leq |X| = \dim(X)$ (ver cap. 1, §8 de [Kun]), entonces $B_\beta \nsubseteq \operatorname{span}(H_\beta)$, pues $\operatorname{span}(H_\beta)$ es subespacio propio de X. Sea $h \in B_\beta \setminus \operatorname{span}(H_\beta)$. Tome $q \in (\|h\| - \varepsilon, \|h\| + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$, donde $\varepsilon > 0$ es tal que $\mathbb{B}(h; \varepsilon) \subseteq B_\beta$. Entonces $h_\beta := q\frac{h}{\|h\|} \in B_\beta$ y $\|h_\beta\| \in \mathbb{Q}$.

Ahora, extienda H' con vectores unitarios a una base de Hamel H. Es claro que H es un subconjunto denso en X. Más aún, para cada $q \in \mathbb{Q}$, el conjunto $\{h \in H : \|h\| = q\}$ es denso en ninguna parte, pues está contenido en una esfera de radio q (que es un conjunto cerrado y con interior vacío). Se sigue que H es magro.

Luego, defina $\widetilde{H} = \{\frac{h}{\|h\|} : h \in H\}$. Es claro que $\widetilde{H}$ es una base de Hamel para X que es densa en ninguna parte. ❐

4. ¡Una base de Hamel conexa!

En esta sección veremos resultados sobre bases de Hamel para espacios de Banach. Nuestro objetivo es demostrar la existencia de bases de Hamel conexas y localmente conexas para espacios de Banach separables y de dimensión infinita. En particular esto será aplicado para establecer la existencia de bases de una sola pieza en la esfera unitaria de los espacios ℓ_p con $p \in [1, +\infty)$. Para establecer lo deseado, primero probaremos algunos resultados para X, un espacio vectorial normado sobre el campo $\mathbb{R}$.

Como es habitual, $o(X)$ denota la cardinalidad de todos los subconjuntos abiertos de X. Naturalmente, $\dim X \leq |X| \leq o(X)$. Si X es separable, entonces $o(X) = |X| = \mathfrak{c}$ (ya que existe una

[3] Dicha sucesión existe; a saber, tome una sucesión $y_n \to k$ y considere tres elementos $z_0, z_1, z_2 \in H$. Luego, $(y_n + {}^{z_0}/_{2^n} + {}^{z_1}/_{2^n} + {}^{z_2}/_{2^n}) \to z$.

base para la topología cuya cardinalidad es $\mathfrak{c}$). En particular, $o(X) = |X| = \dim X = \mathfrak{c}$ si X es un espacio de Banach separable y de dimensión infinita, esto por proposición 3.1.

Si L es un subespacio lineal de X entonces $\operatorname{codim} L$ denota la codimensión (posiblemente finita) de L en X. Se tiene que $\operatorname{codim} L = \kappa$ si y sólo si alguna base H de X tiene un subconjunto H' con $\operatorname{span}(H') = L$ y $|H \setminus H'| = \kappa$.

Veamos algunos hechos básicos.

4.1 Si el interior de $S \subseteq X$ no es vacío, entonces $\operatorname{span}(S) = X$.

4.2 Si U es un subconjunto abierto no vacío y L es un subespacio lineal de X, entonces $U \setminus L$ contiene un conjunto linealmente independiente de tamaño $\operatorname{codim} L$.

Para 4.1, observemos que si V es una bola abierta no vacía con centro en v, entonces $W = -v + V$ es una bola abierta alrededor de 0 y, por lo tanto, $\operatorname{span}(V) = \operatorname{span}(W) \supseteq \mathbb{R} \cdot W = X$. Es claro que 4.2 se deduce de 4.1 y, además, notemos que 4.2 cubre el caso $L = X$ ya que $\operatorname{codim} X = 0$ y $\emptyset$ es linealmente independiente.

Lema 4.3. *Si $U \subseteq X$ es un conjunto abierto, convexo y no vacío, y si L es un subespacio lineal de X con $\operatorname{codim} L \geq 2$, entonces $U \setminus L$ es denso en U y conexo por caminos.*

Demostración. Sea L' cualquier complemento algebraico de L en X. Entonces, para cada $x \in X$ existe un par único $(u, v) \in L' \times L$ tal que $x = u + v$. Sean x_1 y x_2 puntos distintos en $U \setminus L$ y escribamos $x_j = u_j + v_j$ con $u_j \in L'$ y $v_j \in L$ para $j \in \{1, 2\}$. Dado que $x_1, x_2 \notin L$ tenemos que $u_1 \neq 0 \neq u_2$. Distinguimos dos casos:

Primero, supongamos que los vectores u_1 y u_2 son linealmente independientes. Entonces, tenemos que $tu_1 + (1-t)u_2$ nunca es cero para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, si $\ell(x, y)$ denota el segmento de línea recta que conecta $x \in X$ con $y \in X \setminus \{x\}$, se tiene que $\ell(x_1, x_2)$ es disjunto de L. Dado que U es convexo, $\ell(x_1, x_2) \subseteq U$ y, por lo tanto, $\ell(x_1, x_2)$ es un camino en $U \setminus L$ que conecta los puntos x_1 y x_2.

En segundo lugar, supongamos que los vectores u_1 y u_2 no son linealmente independientes. Equivalentemente, $u_1 = \lambda u_2$ para algún escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado que la dimensión algebraica (posiblemente finita) del espacio vectorial L' es mayor que 1, por 4.2 podemos elegir un punto $y \in U \setminus \operatorname{span}(L \cup \{u_1\})$.

Afirmamos que $\ell(y, x_j) \cap L = \emptyset$ para $j \in \{1, 2\}$. Entonces, dado que U es convexo, $\ell(x_1, y) \cup \ell(x_2, y)$ es un camino en $U \setminus L$ que conecta los puntos x_1 y x_2.

Supongamos por el contrario que $\ell(y, x_j) \cap L \neq \emptyset$ para algún $j \in \{1, 2\}$. Entonces, para algún $t \in [0, 1]$, el punto $ty + (1-t)x_j$ se encuentra en L, con $y = u_3 + v_3$ para $(u_3, v_3) \in L' \times L$. Así tenemos, $(tu_3 + (1-t)u_j) + (tv_3 + (1-t)v_j) \in L$ y esto sólo es posible si $tu_3 + (1-t)u_j = 0$, pero ya que $u_j \neq 0$ observamos que $t \neq 0$ y, por lo tanto, $u_3 \in \operatorname{span}(\{u_j\}) = \operatorname{span}(\{u_1\}) \subseteq \operatorname{span}(L \cup \{u_1\})$. Dado que trivialmente $v_3 \in \operatorname{span}(L \cup \{u_1\})$, concluimos que $y = u_3 + v_3$ se encuentra en $\operatorname{span}(L \cup \{u_1\})$ y esto no es posible.

En ambos casos, los puntos x_1 y x_2 pueden ser conectados por un camino en $U \setminus L$, lo que demuestra que $U \setminus L$ es conexo por caminos. En cuanto a la densidad, de 4.1 se infiere que L no puede contener un conjunto abierto no vacío. Por lo tanto, $U \setminus L$ debe ser denso en U. ❐

Ahora veamos un resultado que nos proporciona bases de Hamel conexas y localmente conexas.

Teorema 4.4. *Si $o(X) = |X| = \dim X$ entonces existe una familia $\mathcal{H}$ de bases de X tal que $|\mathcal{H}| = 2^{|X|}$ y cada elemento de $\mathcal{H}$ es un subconjunto conexo, localmente conexo y denso de X.*

Demostración. Suponga que $\dim X = |X| = \kappa$. Defina a la familia $\mathscr{G}$ como sigue:

$$\mathscr{G} := \{G \subseteq X : \dim \operatorname{span}(G) = \kappa \ \wedge \ G = U_1 \setminus U_2, \text{ para } U_1, U_2 \text{ subconjuntos abiertos de } X\}.$$

Trivialmente, $|\mathscr{G}| \leq o(X) = \kappa$. En virtud de 4.1, cada subconjunto abierto no vacío de X y cada bola cerrada no degenerada en X pertenece a la familia $\mathscr{G}$. Por consiguiente, $|\mathscr{G}| = o(X) = \kappa$. Así podemos escribir $\mathscr{G} = \{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sea ρ una función de elección definida sobre los subconjuntos no vacíos de X, entonces se tiene que $\rho(S) \in S$ para cada subconjunto no vacío $S \subseteq X$.

Ahora, por recursión definimos los puntos x_α en X para todo $\alpha < \kappa$. Supongamos que para $\xi < \kappa$ ya está definido un punto x_α para cada $\alpha < \xi$. Entonces definimos el punto x_ξ por

$$x_\xi := \rho\left[G_\xi \setminus \operatorname{span}(\{x_\alpha \mid \alpha < \xi\})\right]$$

Esta definición es correcta porque el conjunto $G_\xi \setminus \operatorname{span}(\{x_\alpha \mid \alpha < \xi\})$ es no vacío, ya que se tiene $|\operatorname{span}(\{x_\alpha \mid \alpha < \xi\})| < |\operatorname{span}(G_\xi)| = |G_\xi| = \kappa$.

De esta manera obtenemos puntos x_α para cada $\alpha < \kappa$; donde $x_\alpha \neq x_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \kappa$. En particular, $A := \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de X con $|A| = \kappa$. Por construcción, para cada $\xi < \kappa$, el vector x_ξ es linealmente independiente de todos los vectores x_α $(\alpha < \xi)$. Por lo tanto, todo el conjunto A es linealmente independiente.

Sea K_0 el conjunto de todos los $\alpha \in \kappa$ tales que G_α es una bola abierta de X. Por supuesto, $|K_0| = \kappa$. Fijamos un vector $x_\beta \in A$ con $\beta \notin K_0$ y elegimos para cada $\alpha \in K_0$ un escalar $\lambda_\alpha \neq 0$ tal que ambos puntos x_α y $\widetilde{x}_\alpha := x_\alpha + \lambda_\alpha x_\beta$ se encuentren en la bola G_α.

Sea $\mathscr{F}$ la familia de todas las funciones de κ en X donde $f(\alpha) \in \{x_\alpha, \widetilde{x}_\alpha\}$ para cada $\alpha \in K_0$ y $f(\alpha) = x_\alpha$ siempre que $\alpha \notin K_0$. Naturalmente, $|\mathscr{F}| = 2^\kappa$. Por construcción, $f(\kappa) \cap G \neq \emptyset$ para cada $G \in \mathscr{G}$ y cada $f \in \mathscr{F}$.

Es evidente que para cada $f \in \mathscr{F}$ tenemos que $\operatorname{span}(A) = \operatorname{span}(f[\kappa])$ y $f[\kappa]$ es una base de $\operatorname{span}(A)$. Aplicando el Lema de Zorn, podemos fijar un subconjunto Y de $X \setminus \operatorname{span}(A)$ tal que Y sea linealmente independiente y $\operatorname{span}(A \cup Y) = X$ (si $\operatorname{span}(A) = X$, entonces $Y = \emptyset$). Por consiguiente, $f[\kappa] \cap Y = \emptyset$ y $f[\kappa] \cup Y$ es una base del espacio vectorial X para cada $f \in \mathscr{F}$. Trivialmente, $f[\kappa] \neq g[\kappa]$ siempre que $f, g \in \mathscr{F}$ sean distintos. Por lo tanto, podemos estar seguros de que el tamaño de $\mathcal{H} := \{f[\kappa] \cup Y : f \in \mathscr{F}\}$ es igual a $|\mathscr{F}| = 2^\kappa$.

Consideremos cualquier base $H \in \mathcal{H}$ de X. Por la definición de H, este intersecta cada conjunto $G \in \mathscr{G}$ y, en particular, cada conjunto abierto no vacío. Por lo tanto, H es un subconjunto denso de X.

Veamos que H es tanto conexo como localmente conexo; notemos que X y todas las bolas abiertas en X son convexas. Por lo tanto, sólo necesitamos verificar lo siguiente.

- Sea $U \subseteq X$ convexo y abierto, entonces se tiene que $H \cap U$ es conexo.

Supongamos lo contrario, entonces existen conjuntos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que:

1. $U_1 \cap (H \cap U) \neq \emptyset$, $U_2 \cap (H \cap U) \neq \emptyset$,
2. $(H \cap U) \subseteq U_1 \cup U_2$,
3. $(H \cap U) \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$.

Dado que H es denso en X, de la última condición inferimos que $U \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$. Como U es conexo, $G := U \setminus (U_1 \cup U_2)$ no puede ser vacío. Así, $U \setminus G$ está separado por los conjuntos abiertos no vacíos $U \cap U_1$ y $U \cap U_2$, por lo tanto, $U \setminus G$ no es conexo.

Ahora, si S es un subconjunto denso y conexo, entonces cada subconjunto del espacio que contenga a S también es conexo. Por lo tanto, el subconjunto $U \setminus \operatorname{span}(G)$ del conjunto no conexo $U \setminus G$ no puede ser a la vez conexo y denso en U. Así, por Lema 4.3, es imposible que $\operatorname{codim} \operatorname{span}(G) \geq 2$. Dado que $\dim X$ es infinito, de $\operatorname{codim} \operatorname{span}(G) < 2$ concluimos que $\dim \operatorname{span}(G) = \dim X$ y por lo tanto G pertenece a nuestra familia $\mathscr{G}$. En consecuencia, $H \cap G \neq \emptyset$. Pero esto es imposible ya que $H \cap U \subseteq U_1 \cup U_2$ y $G \subseteq U$. Así obtenemos lo deseado y esto concluye la prueba. ❐

Notemos que $o(\ell_p) = |\ell_p| = \dim \ell_p = \mathfrak{c}$ para $p \in [1, +\infty)$. Usando teorema 4.4, obtenemos bases de Hamel conexas, localmente conexas y densas en ℓ_p.

Teorema 4.5. *Si $o(X) = |X| = \dim X$, entonces existe una base de X que es un subconjunto conexo y localmente conexo de la esfera unitaria $\mathbb{S}_X$.*

Demostración. Sea φ la función continua que asigna $x \mapsto \|x\|^{-1} \cdot x$ de $X \setminus \{0\}$ a la esfera unitaria $\$_X$. Por lo tanto, $\varphi(S)$ es conexo siempre que S sea un subconjunto conexo de $X \setminus \{0\}$. Además, φ es una retracción (es decir, $\varphi \circ \varphi = \varphi$) y, por lo tanto, $\varphi(S)$ es localmente conexo siempre que S sea un subconjunto localmente conexo de $X \setminus \{0\}$, aplicando [Eng] 2.4.E.(c) y 6.3.3.(d). Es evidente que φ restringida a una base H de X es inyectiva y $\varphi(H)$ también es una base de X. Por lo tanto, usando el teorema 4.4 obtenemos lo deseado. ❒

Respecto a la hipótesis de este teorema, el caso $o(X) = |X| = \dim X > \mathfrak{c}$ no es trivial porque si X es un espacio de Banach de manera que la mínima cardinalidad de una base para su topología es un cardinal límite fuerte de cofinalidad numerable, κ; entonces se sabe que $\kappa^{\aleph_0} = 2^\kappa$, véase [Jec, 5.23], y por lo tanto (véase [Eng, 4.1.H y 4.1.15]) tenemos $o(X) = 2^\kappa = \kappa^{\aleph_0} = |X| = \dim X$. Sin embargo, si $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ para la mínima cardinalidad de una base para la topología de X, entonces $o(X) = 2^\kappa > \kappa = \kappa^{\aleph_0} = |X| = \dim X$.

Para $\varphi(x) = \|x\|^{-1} \cdot x$ tenemos claramente que $\varphi(H_1) \neq \varphi(H_2)$ siempre que H_1 y H_2 sean bases distintas en $\mathcal{H}$. En consecuencia, si $o(X) = |X| = \dim X$, entonces existen $2^{|X|}$ bases de X que son subconjuntos conexos y localmente conexos de la esfera unitaria $\mathbb{S}_X$, además dichas bases son densas en ninguna parte.

Todos los resultados anteriores fueron obtenidos de [Ku1]. Ahora podríamos considerar cambiar las condiciones para obtener resultados similares a los anteriores, y aquí es donde entra la Hipótesis del Continuo. Si asumimos esta hipótesis y consideramos un espacio de Banach X con cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces podemos obtener una base de Hamel densa y conexa por caminos en X (véase [Mer]).

5. ... y aún hay algo por hacer sobre bases de Hamel.

Creemos que este tema es básicamente un tema elemental y muy interesante que aún tiene mucho por ofrecer. Hay multitud de preguntas que tienen que ver con consistencia e independencia relativa a esa de ZFC, ver por ejemplo [BDH] y [SWY]. Aquí incluimos algunas preguntas abiertas que no se alejan mucho de lo presentado en esta nota. Una que no hemos sido capaces de resolver es

Pregunta 1. *¿Qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ son incapaces de ser/contener bases de Hamel?*

Obviamente hay respuestas triviales, pero estamos interesados en conocer una caracterización topológica de aquellos subconjuntos que sí contienen bases de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, obviamente no puede ser un conjunto conexo o localmente conexo: ¿y subconjuntos típicos? ¿Puede una base de Hamel ser un conjunto de Bernstein o al menos cada conjunto de Bernstein sí contiene una base? En el teorema 3.7 de [BDH] se muestra que una base de Hamel no puede ser un subconjunto σ-compacto. En este mismo espíritu tenemos una pregunta planteada por Tomek Bartoszińki y sus coautores,

Pregunta 2 (Bartoszińki et. al.)**.** *¿Existe un espacio de Banach en el que todas sus bases de Hamel sean magras?*

Antes, teorema 2.5, se mostró que una base de Hamel para $\mathbb{R}$ no puede ser un conjunto analítico, pero qué tal el complemento de uno o imagen continua de un conjunto coanalítico (i.e. el complemento de un conjunto analítico):

Pregunta 3. [NS] *¿Puede una base de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ ser un conjunto coanalítico o una imagen continua de un conjunto coanalítico?*

Como se ha mencionado antes, las familias casi ajenas y familias independientes de subconjuntos de números naturales han resultado herramientas combinatorias muy útiles para realizar diversas construcciones. En esta misma nota hemos usado ambas clases de familias para realizar construcciones de conjuntos de vectores linealmente independientes. También Bartoszyński y sus coautores plantean como su cuarta pregunta abierta: ¿Es cierto que todo espacio de Banach de cardinalidad κ admite una familia de 2^κ bases de Hamel que sean casi ajenas? En este contexto, casi ajenas significa que la intersección de dos de esas bases tiene cardinalidad menor que κ. En [Hal] se responde que no es decible en ZFC; es decir, hay modelos en los que para todo κ y todo espacio de Banach de esa cardinalidad posee una familia de 2^κ bases de Hamel casi ajenas; también hay modelos en los que para un κ hay un espacio de Banach que no tiene una familia grande de bases de Hamel casi ajenas. El concepto de casi ajeno puede ser modificado con facilidad; por ejemplo, podríamos decir que dos bases de Hamel H_0 y H_1 para un espacio X son *casi independientes* si la dimensión de $\operatorname{span}(H_0 \cap H_1)$ es finita. Nosotros preguntamos:

Pregunta 4. *Si X es un espacio de Banach de cardinalidad κ, ¿cuál es la mínima cardinalidad de una familia $\subseteq$-maximal de bases de Hamel casi independientes?*

Terminaremos esta lista de preguntas con otra que es simple de plantear. En el Corolario 3.5 hemos visto que si X es un espacio de Banach y $H \subseteq X$ es una base de Hamel, entonces $|X| = |H|$. En la literatura hay varias maneras de realizar la demostración de esta propiedad; pero todas dependen de la completez y no se sabe si el resultado sigue siendo válido en una clase más amplia de espacios. Más precisamente,

Pregunta 5. [Hal] *Si H es una base de Hamel para un espacio vectorial de dimensión infinita X que es separable y completo como espacio métrico; ¿debe ser que $|H| = \mathfrak{c}$?*

Apéndice

Gráficas completas no numerables

Presentaremos un resultado importante que se ha usado anteriormente para establecer una equivalencia de CH (véase [EK]). Aunque este resultado queda fuera de nuestros intereses principales, creemos que es necesario incluirlo para completar y dar por finalizado nuestro trabajo.

Primero daremos algunas definiciones.

Definición 5.1. Una gráfica es un par ordenado $G = (V, E)$ que comprende:

- V, un conjunto de vértices (también llamados nodos o puntos);
- $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V \text{ y } x \neq y\}$, un conjunto de aristas (también llamado segmento), que son pares no ordenados de vértices (es decir, una arista está asociada con dos vértices distintos).

A su vez, una gráfica G se dice completa si cada par de puntos de G está conectado por un único segmento, y una subgráfica se dice conexa si para cada par de vértices en ella existe un camino poligonal que los conecta. Dos segmentos $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\} \in G$ son consecutivos si $\alpha = \gamma \wedge \beta \neq \delta$ o $\beta = \delta \wedge \alpha \neq \gamma$.

Definición 5.2. Un árbol T es una gráfica conexa que no contiene ciclos, equivalentemente G se llama un árbol si no contiene ningún polígono cerrado.

Teorema 5.3 (Erdös-Kakutani)**.** *Una gráfica completa G de número cardinal κ (es decir, el número cardinal de los vértices es κ) puede ser separada en una cantidad numerable de árboles si y sólo si $\kappa \leq \aleph_1$.*

Demostración. El resultado es claro para gráficas completas de cardinalidad a lo más numerable, entonces sólo lo probaremos para la gráfica completa de cardinalidad ω_1. Primero probaremos que la gráfica G completa de número cardinal $\aleph_1$ puede ser separada en una cantidad numerable de árboles. Podemos suponer que G está representada por un sistema de segmentos

$$G = \{\{\alpha, \beta\} : \omega \leq \alpha < \beta < \omega_1\}.$$

Para cualquier $\omega \leq \beta < \omega_1$, tomemos una una función biyectiva $f_\beta : \beta \to \omega$ y el siguiente conjunto $G_n = \{\{\alpha, \beta\} : f_\beta(\alpha) = n\}$, es claro que $G = \bigcup_{n\in\omega} G_n$. Además para cada G_n y $\beta < \omega_1$, existe un único $\alpha < \beta$ tal que $\{\alpha, \beta\} \in G_n$ (usando que la función f_β es biyectiva). También de esto se sigue que si α_0 es cualquiera de los nodos de G_n, entonces hay una sucesión finita $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_k = \omega$ de modo que $f_{\alpha_{i-1}}(n) = \alpha_i$, para $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto cada G_n es un subconjunto conexo de G.

Supongamos que tenemos un polígono cerrado en G_n, tomemos sus vértices $\{\alpha_k : k \leq n\}$ y $\beta = \max\{\alpha_k : k \leq n\}$. Por ser un polígono cerrado para β deben existir $k_0, k_1 \leq n$ distintos, tales que $\{\alpha_{k_0}, \beta\}, \{\alpha_{k_1}, \beta\} \in G_n$, lo que no es posible. Así cada G_n es un árbol.

Para el otro caso, tomemos G la gráfica completa de número cardinal κ y $G = \bigcup_{n\in\omega} T_n$, donde cada T_n es un árbol. Podemos suponer nuevamente que G está representada por un sistema de segmentos

$$G = \{\{\alpha, \beta\} : \omega \leq \alpha < \beta < \kappa\}.$$

Definición 5.4. Sea T un árbol, para cada $S \subseteq T$ conexo y algún vértice fijo α_s de un segmento en S, diremos que:

- $\{\alpha, \beta\} \in S$ tiene grado 1 si $\alpha = \alpha_s$, y si ya hemos definido hasta el grado n, entonces $\{\alpha, \beta\} \in S$ tiene grado $n + 1$ si existe $\gamma < \alpha$ tal que $\{\gamma, \alpha\} \in S$ tiene grado n y $\{\alpha, \beta\}$ no tiene ya asignado un grado menor o igual a n.
- De manera análoga, $\{\alpha, \beta\} \in S$ tiene grado -1 si $\beta = \alpha_s$, y si ya hemos definido hasta el grado $-n$, entonces $\{\alpha, \beta\} \in S$ tiene grado $-(n + 1)$ si existe $\beta < \gamma < \kappa$ tal que $\{\beta, \gamma\} \in S$ tiene grado $-n$ y $\{\alpha, \beta\}$ no tiene ya asignado un grado mayor o igual a $-n$.

Usaremos la notación $\deg(S, \{\alpha, \beta\})$ para denotar el grado del segmento $\{\alpha, \beta\}$ con respecto del subconjunto conexo S.

Considere la descomposición (no necesariamente numerable) de cada T_n en sus componentes conexas, $T_n = \bigcup_{\xi<\lambda} T_n(\xi)$; donde λ es la cantidad de componentes conexas de T_n.

Definimos los siguientes conjuntos

$$T_n^+(\xi) = \{\{\alpha, \beta\} : \deg(T_n(\xi), \{\alpha, \beta\}) > 0\},$$
$$T_n^-(\xi) = \{\{\alpha, \beta\} : \deg(T_n(\xi), \{\alpha, \beta\}) < 0\}.$$

Para esto notemos lo siguiente:

5.1 Cualquier par de segmentos consecutivos de la gráfica $T_n^+(\xi)$ son de la forma: $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}$ con $\alpha < \beta, \gamma < \delta$ y $\beta \neq \delta$, ya que si existieran $\alpha \neq \gamma$ tal que $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \beta\} \in S$ podríamos obtener caminos poligonales hacia α_s y por tanto tener un polígono en S, lo que no es posible.

5.2 Cualquier par de segmentos consecutivos de la gráfica $T_n^-(\xi)$ son de la forma: $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}$ con $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$ y $\alpha \neq \gamma$.

Ahora definimos

$$T_n^+ = \bigcup_{\xi<\lambda} T_n^+(\xi), \quad T_n^- = \bigcup_{\xi<\lambda} T_n^-(\xi).$$

Así obtenemos una descomposición de $T_n = T_n^+ \cup T_n^-$, donde T_n^+ y T_n^- cumplen las observaciones 5.1 y 5.2 respectivamente. De lo anterior obtenemos, $G = \bigcup_{n\in\omega} T_n^+ \cup T_n^-$.

Observamos que las siguientes observaciones se siguen de 5.1 y 5.2 respectivamente.

5.3 Para cualquier $\alpha < \kappa$, existe un único $\beta < \alpha$ tal que $\{\beta, \alpha\} \in T_n^+$.

5.4 Para cualquier $\alpha < \kappa$, existe un único $\alpha < \beta < \kappa$ tal que $\{\alpha, \beta\} \in T_n^-$.

Tomando los siguientes conjuntos,

$$T^+ = \bigcup_{n\in\omega} T_n^+, \quad T^- = \bigcup_{n\in\omega} T_n^-.$$

Notamos que satisfacen claramente las siguientes condiciones:

5.5 Para cualquier $\alpha < \kappa$, el conjunto de todos los $\beta < \alpha$ tal que $\{\beta, \alpha\} \in T^+$ es numerable.
5.6 Para cualquier $\alpha < \kappa$, el conjunto de todos los $\alpha < \beta$ tal que $\{\alpha, \beta\} \in T^-$ es numerable.

De esto se sigue fácilmente por el mismo argumento que en ([Sie], p. 9) que el número cardinal κ de todos los puntos $\alpha < \kappa$, es como máximo $\aleph_1$. ❒

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y a su programa Verano Nicolaita durante el cual este trabajo fue realizado. Asimismo agradecemos a Carlos López Callejas y a Luis David Saenz por valiosos comentarios que nos ayudaron a mejorar la primera versión.

Referencias

[BDH] T. Bartoszyński, et al. *On bases in Banach spaces*, Studia Mathematica **170.2**, p. 147-171; 2005.

[EK] P. Erdös, S. Kakutani. *On non-denumerable graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (6), p. 457-461, June 1943.

[Eng] R. Engelking. *General Topology, revised and completed edition*, Heldermann, 1989.

[FHM] A. Flores Ferrer, F. Hernández Hernández, C. Martínez Lázaro, L. A. Martínez Pérez, A. Torres Ayala. *Topología y sus aplicaciones 1*, Textos Científicos, BUAP, pp. 167-186, 2012.

[FK] G. Fichtenholz, L. Kantorovitch. *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Mathematica **5**, p. 69-98; 1935.

[Gro] D. Grozev, *Dragomir Grozev's math blog.* https://dgrozev.wordpress.com/2021/01/11/hamel-bases-part-3-application-on-an-olympiad-problem/

[HH] L. Halbeisen, N. Hungerbühler. *The cardinality of Hamel Bases of Banach spaces*, East-West Journal of Mathematics **2**, p. 153-159, 2000.

[Hal] L. Halbeisen. *Families of almost disjoint Hamel bases*, Extracta Mathematicae 20 (2005) 199-202.

[Her] F. Hernández-Hernández. *Teoría de Conjuntos: una introducción*, Aportaciones Matemáticas **13**, Instituto de Matemáticas UNAM, 2021.

[HI] F. Hernández-Hernández y M. Ibarra Contreras. *Introducción a la Teoría de la Medida*, Aportaciones Matemáticas **42**, Instituto de Matemáticas UNAM, 2018.

[He1] F. Hernández-Hernández. *Curso de Topología: un enfoque conjuntista*, Aportaciones Matemáticas **43**, Instituto de Matemáticas UNAM, 2019.

[Hig] J. S. Higdon. *A note on Hamel bases.* Tesis de maestría, University of Tennessee, 2008, https://trace.tennessee.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1431&context=utk_gradthes.

[Iri] I. L. Iribarren. *Topología de Espacios Métricos*, Limusa-Wiley, 1973.

[Jec] T. Jech. *Set Theory*, 3rd ed., Springer, 2002.

[Kre] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[Kub] G. Kuba. *Transfinite dimensions*, arXiv:2010.01983 [math.GM], 2020.

[Ku1] G. Kuba. *Connected Hamel bases in Hilbert spaces*, arXiv:2402.07678 [math.FA], 2024.

[Kun] K. Kunen, J. E. Vaughan. *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, 1984.

[Lan] S. Lang. *Algebra*, Revised 3rd ed., Springer-Verlag, 2002.

[LT] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I: Sequences Spaces*, Springer-Verlag, 1977.

[Lop] C. López-Callejas. *Familias independientes: cardinalidad y estructura*, ICBI-BD-UAEH, 2018, http://dgsa.uaeh.edu.mx:8080/bibliotecadigital/handle/231104/2159.

[Mab] R. D. Mabry. *No nontrivial Hamel basis is closed under multiplication*, Aequat. Math. **71**, p. 294–299, 2006.

[Mer] E. H. Merryman. *An arcwise connected dense Hamel basis for Hilbert space*, Proc. Am. Math. Soc. **26** (1), pp. 126-128, 1970.

[NS] M.G. Nadkarni, V.S. Sunder, *Hamel bases and measurability.* Mathematics Newsletter 14, 2004.

[PS] A. N. Parshin, R. Shafarevich. *Number Theory IV: Transcendental Numbers*, Springer, 1997.

[Rio] A. Ríos Herrejón. *Una introducción a los espacios vectoriales de dimensión infinita*, Miscelanea Matemática 75 (2022) 71-86.
[SWY] R. Schindler, L. Wu, L. Yu. *Hamel bases and the principle of dependent choice*, To appear, 2024.
[Sie] W. Sierpiński. *Hypothèse du continu*, Chelsea Publishing Company, 1934.
[Spi] M. Spivak. *Calculus*, 3rd ed., Reverté, 2014.
[Str] K. Stromberg. *An elementary proof of Steinhaus's Theorem*, Proc. Am. Math. Soc. **36** (1), 1972.

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
Email address: `1902535x@umich.mx`

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
Email address: `1902595c@umich.mx`

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
Email address: `fernando.hernandez@umich.mx`