Ejercicios de Topología

1. Si A y B son conjuntos y $A \backslash B$ y $B \backslash A$ son equipotentes entonces $|A| = |B|$.

2. Si $|A_0| = |B_0|$ y $|A_1| = |B_1|$, entonces no necesariamente se tiene que $|A_0 \cap B_0| = |A_1 \cap B_1|$.

3. Sean A, B y C cualesquiera conjuntos no vacíos. ¿Bajo qué condición se tiene que $\left|A^{B \times C}\right| = \left|A^B\right| \cdot \left|A^C\right|$?

4. Sea X un conjunto y denote por $[X]^{<\omega}$, la familia de todos los subconjuntos finitos de X. ¿Cuál es la cardinalidad de $[X]^{<\omega}$?

5. Sean X un conjunto y κ un cardinal. ¿Cuál es la cardinalidad de $[X]^{\kappa}$? (Bajo qué definición... ¿cuál es la definición natural de $[X]^{\kappa}$?)

6. Un conjunto linealmente ordenado X es bien ordenado si y sólo si no contiene un subconjunto $\{x_n : n \in \omega\}$ tal que $x_n > x_{n+1}$ para cada $n \in \omega$.

7. Para un conjunto parcialmente ordenado X existe un conjunto linealmente ordenado $Y \subseteq X$ tal que cualquier cota superior de Y es un elemento de Y.

8. Existe un partición $\mathcal{P}$ de ω_1 que tiene cardinalidad $\aleph_1$ y tal que cada uno de sus elementos es no acotado en ω_1.

9. Sea X un conjunto no vacío. Entonces una topología sobre X es $\tau_f = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Al espacio (X, τ_f) se le suele llamar *espacio cofinito.*

10. Sea X un conjunto no numerable. Entonces

$$\tau_c = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es a lo más numerable}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología sobre X. Al espacio (X, τ_c) se le suele llamar *espacio conumerable.* ¿Es la familia

$$\tau_\infty = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es infinito}\}$$

una topología sobre X?

11. Sea $X = \{0, 1, \}$ y sea $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Entonces τ es una topología sobre X y al espacio (X, τ) se le conoce como espacio de Sierpiński.

12. Decimos que un subconjunto de los naturales (positivos) es *gordo* si su suma de recíprocos diverge. Muestre que es posible dotar a los naturales de una topología τ de tal manera que los subconjuntos gordos de $\mathbb{N}$ se

correspondan con los densos de $(\mathbb{N}, \tau)$.[1] Recuerde que un subconjunto D de un espacio X se llama *denso* si para cada abierto $U \subseteq X$ se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$.

13. (a) Si $\{\tau_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de topologías sobre un conjunto no vacío X, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ es una topología sobre X. ¿Es $\bigcup_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ una topología?

    (b) Si $\{\tau_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de topologías sobre un conjunto no vacío X, entonces hay una única topología $\subseteq$-mínima que contiene a cada τ_α para $\alpha \in I$ y hay una $\subseteq$-máxima topología, única, que está contenida en cada τ_α, para cada $\alpha \in I$.

    (c) Si $X = \{0, 1, 2\}$ y $\tau_0 = \{\emptyset, X, \{0\}, \{0, 1\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1, 2\}\}$, encuentre las topología de que habla la parte anterior.

14. Sea $i : \wp(X) \to \wp(X)$ una función con las siguientes propiedades:

    (a) $i(X) = X$,

    (b) $i(A) \subseteq A$,

    (c) $i(i(A)) = i(A)$,

    (d) $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$.

    Demuéstrese que $\{A \in \wp(X) : i(A) = A\}$ es una topología sobre X y que $\overset{\circ}{A} = i(A)$, para cada $A \in \wp(X)$.

15. El interior $\overset{\circ}{A}$ de un conjunto A en un espacio topológico es el $\subseteq$-máximo conjunto abierto contenido en A.

16. Sea (X, τ) un espacio. Entonces un subconjunto A de X es un conjunto abierto si y sólo si $A = \overset{\circ}{A}$.

17. Sea (X, τ) un espacio. Entonces un subconjunto A de X es un conjunto cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

18. Sea $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : x_0 \in U\}$. Esta es una topología sobre cualquier conjunto X tal que $x_0 \in X$. Muestre que cualquier $x \in X \setminus \{x_0\}$ es un punto límite de X y que X es la clausura de cualquier abierto no vacío.

19. Sean (X, τ) un espacio y $A \subseteq X$. Entonces A es cerrado si todo punto clausura de A pertenece a A.

20. Sean A y U dos subconjuntos de un espacio X siendo U abierto. Entonces $\overline{U \cap A} = \overline{U \cap \overline{A}}$.

[1] La motivación para esta última pregunta es simple. Un resultado clásico de la teoría indica que P (los primos) es un subconjunto gordo de ω. Intuitivamente, la gordura indica que ellos conforman "una buena tajada" de ω. Una manera de hacer riguroso este último comentario es precisamente ofreciendo una topología τ como se indica. En particular, sería interesante tener una topología τ donde, en algún sentido, P pueda verse como "el gordo universal" de ω. (José Hernández Santiago)

21. Sea (X, τ) un espacio. Un subconjunto U de un espacio X se llama *abierto regular* si $\overset{\circ}{\overline{U}} = U$. Entonces $\overset{\circ}{\overline{A}}$ es un abierto regular para cada $A \subseteq X$.

22. Sean (X, τ) un espacio y $A \subseteq X$. Entonces $\overline{A} = X \setminus \text{int}\,(X \setminus A)$.

23. Sean (X, τ) un espacio y $A, B \subseteq X$. Entonces $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. De un ejemplo que muestre que la igualdad puede no ser cierta.

24. ¿Es cierto que si E es un subconjunto de un espacio topológico X se tiene que

$$\overset{\circ}{\overline{\text{Ext } E \cup \overset{\circ}{E}}} \neq \emptyset?$$

En caso de no ser cierto, halle una condición suficiente para que lo sea. Aquí a Ext E se le llama *exterior* del conjunto E y se define como el interior de $X \setminus E$.

25. Sean (X, τ) un espacio y F un subconjunto cerrado de X. Entonces $F = \text{int}\,(F) \cup \partial F$ y $\text{int}\,(F) = \text{int}\left(\overline{\text{int}\,(F)}\right)$.

26. (Kuratowski) Aplicando alternativamente los operadores de cerradura y complemento a un subconjunto A de un espacio topológico X se obtienen a lo más catorce diferentes conjuntos. Encuentrese además un conjunto de reales con el cual uno obtenga exactamente los catorce conjuntos.

27. Sea A un subconjunto de un espacio X. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones.

    (a) La frontera de A, donotada ∂A, es un subconjunto nunca denso,

    (b) Existe un abierto $V \subseteq X$ y un nunca denso $C \subseteq X$ tales que $A = V \cup C$,

    (c) Existe un abierto U tal que $A \setminus U$ y $U \setminus A$ son ambos nunca densos.

28. El orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ está dado por:

$$\langle a, b \rangle \leq \langle x, y \rangle \text{ si y sólo si } a < x \text{ o } a = x \ \& \ b \leq y.$$

Considere la topología inducida por el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ y encuentre la clausura, el interior, los puntos límite y los puntos aislados de $I = [0, 1] \times [0, 1]$.

29. Un subconjunto N de un espacio (X, τ) es denso en ninguna parte si y sólo si para todo abierto no vacío U de X existe un abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $V \cap N = \emptyset$.

30. La unión de un conjunto co-denso y un conjunto denso en ninguna parte es un conjunto co-denso. Note que la unión de dos conjuntos co-densos no es necesariamente un conjunto co-denso.

31. Cualquier subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ (con su topología usual) es la frontera de algún conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

32. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se llama *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que $\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}$ es finito. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se llama *punto finita* si $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ es finito para cada $x \in X$. Toda familia que es localmente finita es también una familia punto finita pero hay familias punto finitas que no son localmente finitas.

33. Si $\mathcal{A}$ es una familia localmente finita, entonces la familia

$$\left\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\right\}$$

también es localmente finita.

34. Existen familias $\mathcal{A}$ que no son localmente finitas pero que $\left\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\right\}$ sí es localmente finita.

35. ¿Existen familias $\mathcal{A}$ que sean punto finitas pero que $\left\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\right\}$ no lo sea?

36. Si $\mathcal{A}$ es una familia localmente finita entonces

$$\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \left\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\right\}.$$

37. Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos cerrados que es localmente finita, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ es un cerrado.

38. Sea X un espacio topológico. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

    (a) Cualquier subconjunto A de X es abierto en $\overline{A}$.

    (b) Para cualquier subconjunto A de X se tiene que: $int(A) = \emptyset$ implica que A es cerrado.

    (c) Para cualquier subconjunto A de X se tiene que: $int(A) = \emptyset$ implica que A es discreto.

    (d) $\overline{A} \setminus A$ es cerrado, para todo $A \subseteq X$.

    (e) Cualquier conjunto denso en X es abierto.

39. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para dos topologías τ y τ' sobre un conjunto $X \neq \emptyset$. Entonces las siguientes son equivalentes:

    (a) τ es más débil que τ'.

    (b) Para cada $x \in X$ y cada básico $B \in \mathcal{B}$ conteniendo a x existe un básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.

40. Sea $\mathcal{G}$ una familia punto finita de conjuntos cerrados tal que $\mathcal{G}$ contiene infinitos elementos y sea $\mathcal{B}$ una base para un espacio X, entonces $\mathcal{B}' = \{B \setminus G : B \in \mathcal{B} \ \& \ G \in \mathcal{G}\}$ es también una base para la topología de X.

41. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

    $\mathcal{B}_0 = \{(a,b) : a \leq b\}$,

    $\mathcal{B}_1 = \{[a,b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}$,

    $\mathcal{B}_2 = \{(a,b] : a < b\} \cup \{\emptyset\}$,

    $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_0 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_0\}$, donde $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

    $\mathcal{B}_4 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$,

    $\mathcal{B}_5 = \{B : |\mathbb{R} \setminus B| < \omega\}$.[2]

    (a) Cada $\mathcal{B}_i$, para $i \in 6 = \{0,1,2,3,4,5\}$, es base para una topología sobre $\mathbb{R}$. En especial, al espacio que resulta con la base $\mathcal{B}_1$ le llamaremos *recta de Sorgenfrey* y lo denotaremos por $\mathbb{R}_\ell$.

    (b) Compare las topologías resultantes.

    (c) En clase vimos que la topología usual es la que resulta de considerar la base $\mathcal{B}_0$. También notamos que esta, la topología usual, tiene una base numerable. ¿Cuáles de las otras topologías tienen también bases numerables?

42. Cualquier espacio que tiene una base numerable para su topología contiene un subconjunto numerable que es denso.

43. Demuestre que la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$ es hereditariamente separable.

44. Construya un espacio Hausdorff infinito con un subconjunto denso, numerable y que consiste de puntos aislados.

45. En $\mathbb{R}$ cada conjunto abierto es unión a lo más numerable de intervalos abiertos y ajenos por pares.

46. En $\mathbb{R}$ los conjuntos abiertos son conjuntos de tipo F_σ. La familia de todos los conjuntos de Borel en los reales puede ser representada como la unión $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$, donde $\mathcal{F}_0$ es la familia de todos los conjuntos cerrados y $\mathcal{F}_\alpha$ consiste de o bien todas las uniones a lo más numerables de miembros de $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi$ para ordinales nones α o todas las intersecciones a lo más numerables de miembros de $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi$ para ordinales pares α. Las familias $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha < \omega_1$, tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$. Deduzca de aquí que en la línea real hay conjuntos que no son conjuntos de Borel.

[2] Para mi ω es el primer ordinal infinito y $\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros positivos; así $\omega = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

47. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es *secuencialmente abierto* si siempre que $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de términos en X que converge a algún punto $a \in A$ se tiene que existe $n_0 \in \omega$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$. Similarmente decimos que A es secuencialmente cerrado si contiene los límites de todas sus sucesiones; es decir, siempre que $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión, con $a_n \in A$ para todo $n \in \omega$, que converge a un punto $x \in X$ se tiene que $x \in A$.

    (a) Cualquier subconjunto abierto es secuencialmente abierto.

    (b) Cualquier subconjunto cerrado es secuencialmente cerrado.

    (c) ¿Hay espacios con subconjuntos secuencialemente cerrados que no son cerrados?

    (d) Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

        i. Todo subconjunto secuencialmente abierto es abierto,

        ii. Todo subconjunto secuencialemnte cerrado es cerrado.

48. Un espacio X se llama *secuencial* si todo conjunto secuencialmente abierto es abierto. Entonces un espacio X es secuencial si siempre que $A \subseteq X$ con $A \neq \overline{A}$ se tiene que existe una sucesión $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ de términos en A que converge a un punto $x \notin A$.

49. Sean X un espacio y $A \subseteq X$. Defínase recursivamente:

    - $A^{(0)} = A$,
    - $A^{(\alpha+1)}$ es igual al conjunto de $x \in X$ para los cuales existe $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de términos en $A^{(\alpha)}$ que converge a x, para cada $\alpha < \omega_1$,
    - Si $\alpha \leq \omega_1$ es un ordinal límite, entonces $A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}$.

    Entonces X es secuencial si y sólo si para cada $B \subseteq X$ se tiene que $\overline{B} = B^{(\omega_1)}$.

50. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X y $Y \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \cap \wp(Y)$ es un filtro sobre Y.

51. Sea X un espacio Hausdorff infinito. Demuestre que existe un ultrafiltro de subconjuntos de X que contiene a todo subconjunto denso y abierto.

52. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X y $f : X \to Y$ es una función, entonces

    $$f_*(\mathcal{U}) = \left\{ V \subseteq Y : f^{-1}[V] \in \mathcal{U} \right\}$$

    es un ultrafiltro sobre Y.

53. Supóngase que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros sobre X. Entonces

    $$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \{ U \subseteq X \times X : \{ x \in X : \{ y \in X : \langle x, y \rangle \in U \} \in \mathcal{G} \} \in \mathcal{F} \}$$

    es un filtro sobre $X \times X$.

54. Sea X un espacio. Un filtro $\mathcal{F}$ converge a un punto $p \in X$ si y sólo si para cualquier filtro $\mathcal{G}$ con $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ se tiene que p es un punto de acumulación de $\mathcal{G}$.

55. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre un conjunto infinito X y sea $\tau_{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \{\emptyset\}$. Entonces $\tau_{\mathcal{U}}$ es una topología sobre X en la que los conjuntos finitos son cerrados, ningún par de puntos tiene vecindades ajenas, pero no hay puntos aislados en $(X, \tau_{\mathcal{U}})$.

56. Si X es un espacio y $A \subseteq X$, entonces un punto $p \in X$ es elemento de $\overline{A}$ si y sólo si existe una base para filtro consistente de subconjuntos de A de modo que el filtro que ésta genera converge a p.

57. Si X es un espacio y $A \subseteq X$, entonces un punto $p \in X$ es elemento de $\operatorname{int}(A)$ si y sólo si A es elemento de cualquier filtro que converge a p.

58. Un espacio X tiene la propiedad de que dados dos puntos cualesquiera existen vecindades ajenas de ellos si y sólo si todo filtro sobre X tiene a lo más un punto de convergencia.

59. Sea X el espacio de Sierpiński y sea 2 el espacio discreto $\{0, 1\}$. Muestre que si f es la función identidad $f : X \to 2$, entonces f no es continua pero que f^{-1} sí lo es.

60. Sea X un conjunto parcialmente ordenado por $\leq$. Defina $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si U satisface la siguiente condición: $x \in U \;\&\; y \leq x \Rightarrow y \in U$. Verifique que esto define una topología y que $f : X \to X$ es continua si y sólo si f preserva el orden.

61. Sea X un espacio secuencial y Y un espacio arbitrario. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si preserva límite de sucesiones; es decir, siempre que $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión en X que converge a $x \in X$, se tiene que $\langle f(x_n) : n \in \omega \rangle$ converge en Y a $f(x)$.

62. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función entonces f es continua si y sólo si $\partial \left(f^{-1}[B] \right) \subseteq f^{-1}[\partial B]$ para cada $B \subseteq Y$.

63. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si B es un conjunto de tipo G_δ (o de tipo F_σ), entonces $f^{-1}[B]$ es del mismo tipo.

64. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función entonces decimos que la función f es *abierta* si para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ se tiene que $f[U]$ es un subconjunto abierto de Y. Análogamente se define función cerrada. Dar ejemplos de los siguientes tipos de funciones:

    (a) una función continua que no es una función abierta,

    (b) una función continua que no es una función cerrada,

    (c) una función abierta que no sea continua,

    (d) una función cerrada que no sea continua,

(e) una función continua y abierta pero no un homeomorfismo,

(f) una función continua y abierta pero no cerrada.

65. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función entonces f es una función cerrada y continua si y sólo si $f\left[\overline{A}\right] = \overline{f[A]}$ para todo $A \subseteq X$.

66. Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función biyectiva entonces los siguientes son equivalentes:

    (a) f es un homeomorfismo.

    (b) f es continua y abierta.

    (c) f es continua y cerrada.

    (d) $f\left[\overline{A}\right] = \overline{f[A]}$ para todo $A \subseteq X$.

67. Si p es un polinomio entonces $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y cerrada.

68. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función biyectiva y continua, entonces f es una función abierta.

69. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función continua y biyectiva.

    (a) ¿Es f abierta?

    (b) ¿Y si $\mathbb{R}^2$ tiene la topología del orden lexicográfico es f abierta?

70. Sea $p : X \to Y$ una función que es abierta y es cerrada. Sea $\varphi : X \to [0,1]$ una función continua y para cada $y \in Y$ sea

$$\widehat{\varphi}(y) = \sup\left(\varphi\left[p^{-1}[y]\right]\right).$$

    Entonces $\widehat{\varphi} : Y \to [0,1]$ es una función continua.

71. Cualquier espacio discreto y numerable es imagen continua de la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$; pero ningún espacio discreto y no numerable lo puede ser.

72. Sea X un espacio discreto y sea $A(X) = X \cup \{p\}$, donde $p \notin X$ y donde cada $\{x\}$ es abierto para $x \in X$ y las vecindades de p son conjuntos de la forma $A(X) \setminus F$, siendo F un conjunto finito que no contiene a p. Si un espacio Y es imagen continua de $A(X)$ bajo una función cerrada, entonces Y es homeomorfo a $A(Z)$, donde Z es un espacio discreto con $|Z| \leq |X|$.

73. Sean X, Y espacios topológicos y $C_K(X,Y)$ el espacio de funciones continuas de X a Y con la *topología compacto abierta*; es decir, la generada por los conjuntos $M(K,U) \subseteq C_K(X,Y)$, donde $f \in M(K,U)$ si y sólo si $f[K] \subseteq U$, siendo $K \subseteq X$ un compacto y $U \subseteq Y$ un abierto.

(a) Sean $\mathcal{K}$ una familia de compactos de X que contiene una base de vecindades en cada punto de X y $\mathcal{B}$ una subbase de los abiertos de Y. Entonces
$$\{M(K,U) : K \in \mathcal{K} \ \& \ U \in \mathcal{B}\}$$
es una subbase de la topología compacto abierta.

(b) Sea X localmente compacto y Hausdorff. Entonces la función evaluación
$$e : C_K(X,Y) \times X \to Y,$$
dada por $e(f,x) = f(x)$, para cada $\langle f,x \rangle \in C_K(X,Y) \times X$, es continua.

74. Sea X un espacio discreto. Una función $f : A(X) \to Y$ continua y sobreyectiva es cerrada si y sólo si para cada par de puntos $y_0, y_1 \in Y$ existen abiertos $U_0, U_1 \subseteq Y$ tales que $y_i \in U_i$, $i \in 2$, y $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.

75. Si la composición $g \circ f$ de funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ es cerrada (abierta), entonces la restricción $g \restriction f[X] : f[X] \to Z$ es cerrada (abierta). Dar un ejemplo de funciones f y g que no sean cerradas (abiertas) pero que $g \circ f$ sí es cerrada (abierta).

76. Si $f : X \to Y$ es una función cerrada, entonces para cualquier subespacio cerrado M de X se tiene que la restricción $f \restriction M$ es una función cerrada.

77. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si cada $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $f \restriction U$ es continua.

78. Sea X un espacio y sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos cerrados cuya unión es X. ¿Bajo qué condiciones una función $f : X \to Y$ es continua si se sabe que $f \restriction F$ es continua para cada $F \in \mathcal{F}$?

79. Si X es un espacio, un subconjunto Y de X se llama *retracto* si existe una función $f : X \to X$ tal que $f \circ f = f$ y $f[X] = Y$.

    Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (a) Y es un retracto de X.

    (b) Cualquier función continua definida en Y es continuamente extendible a todo X.

    (c) Existe una función continua $r : X \to Y$ tal que $r \restriction Y = id_Y$.

80. Sean X y Y dos espacios topológicos y sea $A \subseteq X \times Y$. Sea $\mathcal{N}_x$ el filtro de vecindades de $x \in X$ y sean
$$A[x] = \{y \in Y : \langle x,y \rangle \in A\}$$
$$A[V] = \bigcup_{t \in V} A[t],$$

donde $V \in \mathcal{N}_x$. Demuestrese que

$$A[x] = \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} \overline{A[V]}$$

y de un ejemplo que muestre que es posible que se tenga $B \subseteq X \times Y$ abierto y

$$\overline{B[x]} \neq \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} B[V].$$

81. El conjunto $\prod_{s \in S} A_s$, donde $\emptyset \neq A_s \subseteq X_s$, es cerrado en el producto $\prod_{s \in S} X_s$ si y sólo si A_s es cerrado en X_s para todo $s \in S$.

82. Sean $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios y $\varphi : S \to S$ una biyección. Entonces los espacios $\prod_{s \in S} X_s$ y $\prod_{s \in S} X_{\varphi(s)}$ son homeomorfos.

83. Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios. Definimos la *topología caja* sobre el producto cartesiano $\prod_{s \in S} X_s$ como la generada por los conjuntos de la forma $\prod_{s \in S} U_s$ donde U_s es un subconjunto abierto del espacio X_s. ¿Cuándo un producto de espacios con la topología caja resulta un espacio discreto?

84. Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios y sea $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de puntos en el producto $\prod_{s \in S} X_s$. Entonces la sucesión

$$\langle x_n : n \in \omega \rangle$$

converge a un punto $x \in \prod_{s \in S} X_s$ si y sólo si $\pi_s(x_n)$ converge a $\pi_s(x)$ para cada $s \in S$. ¿Es esto cierto si cambiamos a la topología producto por la topología caja?

85. Dado $f \in \mathbb{R}^X$ se define el *soporte* de f como el conjunto

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Considere $\sigma\mathbb{R}^\omega = \{f \in \mathbb{R}^\omega : |\operatorname{supp}(f)| < \aleph_0\}$. ¿Cuál es la clausura de $\sigma\mathbb{R}^\omega$ con respecto a la topología caja y a la topología producto?

86. Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios. Si el espacio $\prod_{s \in S} X_s$ tiene una base de cardinalidad κ, entonces cada uno de los espacios X_s tiene una base de cardinalidad a lo más κ.

87. Para cada $\alpha \in A$, sean X_α un espacio topológico, Y_α un subespacio de X_α y sea $\mathcal{G}_\alpha$ una familia de subconjuntos G_δ de X_α tal que $\bigcup \mathcal{G}_\alpha = X_\alpha \setminus Y_\alpha$. Además sea $\widetilde{U} = U \times \prod \{X_\beta : \beta \in A \setminus \{\alpha\}\}$ para cada $U \in \mathcal{G}_\alpha$, $\widetilde{\mathcal{G}}_\alpha = \left\{\widetilde{U} : U \in \mathcal{G}_\alpha\right\}$, $\widetilde{\mathcal{G}} = \bigcup \left\{\widetilde{\mathcal{G}}_\alpha : \alpha \in A\right\}$, $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ y $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ con sus topologías producto. Entonces:

    (a) $\widetilde{U}$ es G_δ en X para cada $\alpha \in A$ y todo $U \in \mathcal{G}_\alpha$.

(b) $X \setminus Y = \bigcup \widetilde{\mathcal{G}}$.

88. Sean Y un conjunto, $\{X_s : s \in S\}$ una familia no vacía de espacios y sea $\{f_s : s \in S\}$ una familia de funciones $f_s : Y \to X_s$.

    (a) Hay una única topología más gruesa τ sobre Y relativa a la cual cada función f_s es continua.

    (b) Sea $\mathcal{S}_s = \left\{f_s^{-1}[U] : U \text{ es abierto en } X_s\right\}$, y sea $\mathcal{S} = \bigcup_{s\in S} S_s$. Entonces $\mathcal{S}$ es una subbase para τ.

    (c) Una función $g : Z \to Y$ es continua, relativa a τ, si y sólo si $f_s \circ g$ es continua para cada $s \in \mathcal{S}$.

    (d) Sea $f : Y \to \prod_{s\in S} X_s$ definida por la ecuación

    $$f(y) = \langle f_s(y) : s \in S\rangle$$

    y sea $Z = f[Y]$ como subespacio del producto $\prod_{s\in S} X_s$. Entonces la imagen de cada elemento de τ es un subconjunto abierto.

89. Sea A un conjunto infinito y $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos tales que cada X_α tiene más de un punto. Para cada $x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ se puede encontrar una sucesión $\langle z_n : n \in \omega\rangle$ de elementos de $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ que converja a x pero que no sea trivial (es decir, que no exista $n_0 \in \omega$ tal que $z_n = x$ para toda $n \geq n_0$).

90. Sea $\pi_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección en la primera coordenada.

    (a) Sean X el subespacio $(\{0\}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\})$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y considere a $g = \pi_1 \restriction X$. Entonces g es una función cerrada pero no es una función abierta.

    (b) Sean Y el subespacio $(\overline{\mathbb{R}^+}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\{0\})$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y sea $h = \pi_1 \restriction Y$. Entonces h no es ni abierta ni cerrada, pero es una función cociente.

91. El espacio $2^\kappa = \prod\{X_\alpha : \alpha \in M\}$, donde $X_\alpha = \{0,1\}$ con topología discreta y $|M| = \kappa$, contiene un subespacio discreto de cardinalidad κ.

92. El espacio 2^κ tiene una base de cardinalidad κ.

93. Sea $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, donde X_α es un espacio discreto finito con más de un punto, para cada $\alpha \in A$. Entonces X es homeomorfo al espacio 2^κ siendo $\kappa = |A| \geq \omega$.

94. Si $X = \prod_{s\in S} X_s$ y cada espacio X_s es separable, entonces cualquier familia de abiertos en X que no son vacíos y son ajenos por pares es numerable.

95. Defina una relación de equivalencia $\approx$ sobre $\mathbb{R}^2$ haciendo:

    $$\langle x, y\rangle \approx \langle u, v\rangle \text{ si y sólo si } x + y^2 = u + v^2.$$

    Sea $\mathcal{D}$ la colección de clases de equivalencia con la topología cociente $\tau_{\mathcal{D}}$. El espacio $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ es homeomorfo a un espacio familiar. ¿Cuál es?

96. Si una composición de funciones continuas $f \circ g$ es una función cociente, entonces f también es una función cociente.

97. Si para una función continua $f : X \to Y$ existe un conjunto $A \subseteq X$ tal que $f[A] = Y$ y la restricción $f \restriction A : A \to Y$ es una función cociente, entonces f es una función cociente.

98. Sea $q : X \to Y$ una función cociente. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.

99. Para una relación de equivalencia E sobre un espacio X las siguientes afirmaciones son equivalentes:[3]

    (a) La proyección natural $\pi : X \to X/E$ es cerrada (abierta).

    (b) Para cualquier subconjunto cerrado A de X, la unión de todas las clases de equivalencia que intersectan a A es un cerrado (abierto) de X.

    (c) Para cualquier conjunto abierto (cerrado) U de X la unión de todos las clases de equivalencia que están contenidas en U es un abierto (cerrado) en X.

100. Sean X un espacio secuencial y $q : X \to Y$ una función cociente sobre un espacio Y. Entonces Y es un espacio secuencial.

101. Sean $L = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $M = \{0\} \cup \{1/i : i \in \mathbb{N}\}$. Sea $Y = (L \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})$ con su topología usual como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Sea $f : Y \to X$ la proyección en la primera coordenada, siendo $X = \{0\} \cup L$. Sea $A = X \setminus M$.

    (a) Entonces aunque X es un espacio secuencial se tiene que $0 \in \overline{A}$ pero no hay una sucesión de términos en A que converja a 0.

    (b) Sea $Z = A \cup \{0\}$. Entonces Z como subespacio de X no es secuencial.

102. (Franklin) Si f es una función cociente de un espacio métrico X sobre un espacio Y, entonces Y es un espacio secuencial. Recíprocamente, si Y es un espacio secuencial, entonces para algún espacio métrico X hay una función cociente $f : X \to Y$.

103. Una función cociente $f : X \to Y$ es cerrada (abierta) si y sólo si el conjunto $f^{-1}[f[A]]$ es cerrado (abierto) para todo cerrado (abierto) $A \subseteq X$.

104. Sea $\mathcal{D}$ una descomposición (partición) de un espacio X. Recuerde que un subconjunto U de X se dice *saturado* (respecto de $\mathcal{D}$) si siempre que $D \cap U \neq \emptyset$ implica $D \subseteq U$, para cada $D \in \mathcal{D}$. También, una descomposión $\mathcal{D}$ se llama *semicontinua superiormente* si para cada $D \in \mathcal{D}$ y cada abierto $U \subseteq X$ existe un abierto saturado $V \subseteq X$ tal que $D \subseteq V \subseteq U$.

[3] X/E es una notación usual para denotar al conjunto cociente; es decir, al conjunto de clases de E-equivalencia.

Demuestre que la proyección natural $p : X \to \mathcal{D}$ es cerrada si y sólo si $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente. Aquí se supone que $\mathcal{D}$ tiene la topología cociente.

105. Si $A \subseteq X$, una *retracción* de X sobre A es una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$. Cada retracción es una función cociente.

106. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia no vacía de espacios y para cada $\alpha \in J$ sea $p_\alpha : X_a \to Y$ una función, donde Y es un conjunto no vacío.

    (a) Hay una única topología más fina τ sobre Y relativa a la cual cada p_α es continua.

    (b) Una función $f : Y \to Z$ es continua relativa a τ si y sólo si $f \circ p_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in J$.

107. ¿Son conexos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$?

    (a) $X = \{\langle x, y\rangle : y = 0\} \cup \left\{\langle x, y\rangle : x > 0 \ \&\ y = \frac{1}{x}\right\}$,

    (b) $Y = \{\langle x, y\rangle : x = 0\} \cup \left\{\langle x, y\rangle : x \neq 0 \ \&\ y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$.

108. Sean τ y τ' dos topologías sobre $X \neq \emptyset$ tales que $\tau \subseteq \tau'$. ¿Qué se implicaciones se pueden verificar respecto a la conexidad de X con respecto a las dos topologías?

109. Si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. ¿Qué se puede decir de la conexidad de $\bigcup_{n\in\omega} A_n$?

110. ¿Es cierto que si X es conexo entonces para cualquier subconjunto propio y no vacío A se tiene que $\partial A \neq \emptyset$? ¿Qué se puede decir del recíproco?

111. ¿Puede S^1 ser homeomorfo a algún subespacio de $\mathbb{R}$?

112. Sea X la figura de 8 con su topología usual.

    (a) ¿Existe una topología τ contenida en la topología usual de $\mathbb{R}$ de modo que con esta topología $\mathbb{R}$ sea homeomorfo a X?

    (b) ¿Existe una topología τ contenida en la topología usual de $\mathbb{R}$ de modo que algún cociente de esa topología $\mathbb{R}$ sea homeomorfo a X?

113. Dótese al conjunto de los números reales de una topología Hausdorff menos fina que la usual, y de otra más fina que la usual, de tal forma que en ambos casos $\mathbb{R}$ siga siendo conexo.

114. Considere a $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de la caja. Para responder sobre la conexidad de este espacio analice el conjunto de todas las sucesiones acotadas de números reales.

115. Si X y Y son espacios conexos, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ son subconjuntos propios, entonces $X \times Y \setminus (A \times B)$ es también un espacio conexo. ¿Es válido el resultado análogo para conexidad por trayectorias?

116. Sea X un espacio métrico y compacto y $C \subseteq X$ un cerrado y conexo. Supóngase que $X \setminus C = V \cup W$, siendo V y W ajenos, no vacíos y abiertos en $X \setminus C$. Demostrar que $C \cup V$ es un conexo cerrado.

117. Demuestre el teorema del valor intermedio: si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(a) < f(b)$, entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \xi < f(b)$ existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = \xi$.

118. Todo espacio ordenado, separable y conexo tiene una base numerable.

119. Sea (X, d) un espacio métrico y supóngase que para todo $\epsilon > 0$ existen $x_0, x_1, \ \ldots x_{n+1}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, tales que $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ para toda $i \leq n$. Demuestre que X es un espacio conexo.

120. ¿Será cierto que el hecho que todo intervalo en $\mathbb{R}$ es un conjunto conexo implica el Axioma del Supremo?

121. ¿Cómo serán las componentes conexas de un espacio: abiertas, cerradas, etc.? ¿Qué pasa si además agregamos que el espacio es localmente conexo?

122. Sea $L = [0, 1) \times \omega_1$ con la topología del orden lexicográfico. Este espacio se conoce como la *línea larga*. ¿Qué se puede decir sobre la conexidad y la conexidad por trayectorias de L? ¿Puede encajarse L en $\mathbb{R}$?

123. ¿Existirá un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo por trayectorias pero que no sea localmente conexo en ninguno de sus puntos?

124. Sea X un espacio T_0 y sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X. Entonces $|X| \leq 2^{|\mathcal{B}|}$.

125. (a) Un espacio conexo y no indiscreto con dos puntos es un espacio T_0.
     (b) Considere la familia $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$, $|A| = \kappa$, cada E_α es un espacio conexo de dos puntos y no indiscreto. Sea $E^\kappa = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$. Entonces X es un espacio T_0 con una base de cardinalidad a lo más κ si y sólo si X es homeomorfo a un subespacio de E^κ.

126. En un espacio X que es T_1, cualquier vecindad de un punto de límite de un conjunto A contiene infinitos puntos de A. También, el conjunto de todos los puntos límite de A es un conjunto cerrado.

127. Existe un espacio Z con tres puntos y tres abiertos de modo que para cualquier espacio X existe un cardinal κ y un subespacio de Z^κ que es homeomorfo a X. Se puede decir coloquialmente que con tres puntos y tres abiertos basta.

128. Cualquier retracto de un espacio Hausdorff es cerrado.

129. Sea $f : X \to Y$ una función continua, donde Y es un espacio Hausdorff. Entonces
$$\{\langle x, y\rangle \in X \times Y : y = f(x)\}$$
es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.

130. Un espacio X es un espacio de Hausdorff si y sólo si $\Delta = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.

131. Si X es un espacio Hausdorff y D es un subconjunto denso de X, entonces $|X| \leq 2^{2^{|D|}}$.

132. Sea (X, τ) un espacio toplógico Hausdorff. ¿Puede tenerse entonces que $|\tau| = \aleph_0$?

133. Si X es un espacio Hausdorff y $\mathcal{E}$ es una familia de subespacios de X, entonces $Y = \bigcap \mathcal{E}$ con la topología inducida por X es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto $\prod \{U : U \in \mathcal{E}\}$.

134. Sea X un espacio T_1 y sea $\mathcal{D}$ una partición de X consistente de conjuntos cerrados. Entonces el espacio cociente $X/\mathcal{D}$ es un espacio T_1.

135. Sea $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y sea X el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología generada tomando como abiertos básicos a los siguientes: Cualquier intervalo abierto (a, b) y cualquier conjunto de la forma $(a, b) \setminus K$. Entonces X con esa topología es un espacio Hausdorff que no es regular.

136. ¿Debe ser normal un espacio T_1 con exactamente un punto no aislado?

137. Si X es un espacio Hausdorff y el conjunto de puntos que no son aislados es finito. ¿Será X normal?

138. Cierto o falso: cualquier espacio Hausdorff y numerable es normal.

139. Cierto o falso: cualquier espacio regular y numerable es normal.

140. Un subconjunto cerrado B de un espacio normal X es un conjunto G_δ si y sólo si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $B = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

141. Un espacio regular X con una base numerable es un espacio perfectamente normal (es decir, todo cerrado es un conjunto G_δ).

142. Un espacio X que es un espacio T_1 es también un espacio completamente regular si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ para la topología de X que satisface las siguientes condiciones:

    (a) Para todo $x \in X$ y para todo $U \in \mathcal{B}$ que contiene a x existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin V$ y $U \cup V = X$.

    (b) Para todo $U, V \in \mathcal{B}$ que satisfacen $U \cup V = X$, existen $U_0, V_0 \in \mathcal{B}$ tales que $X \setminus V \subseteq U_0$, $X \setminus U \subseteq V_0$ y $U_0 \cap V_0 = \emptyset$.

143. Un espacio X es *completamente (o hereditariamente) normal* si cualquier subespacio es normal. Un espacio T_1 X es completamente normal si y sólo si para cualquier par de conjuntos $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ y $\overline{A} \cap B = \emptyset$ (es decir, que están separados), existen vecindades abiertas de ellos que son ajenas.

144. Si un producto $X \times Y$ de espacios X y Y es hereditariamente normal, entonces o bien Y es perfectamente normal o cada subespacio numerable de X es cerrado.

145. Sean X un espacio normal y $F \subseteq X$ que es cerrado. Entonces cualquier función continua $f : F \to [0,1]^n$ puede ser continuamente extendida a X.

146. Un espacio X que es T_1 es un espacio normal si y sólo si para cualquier cubierta abierta $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ existe una cubierta abierta

$$\{V_0, V_1, \ldots, V_n\}$$

tal que para cada $i \leq n$ se tiene que $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

147. Si X es un espacio T_1 que es la unión finita de una familia de subespacios cerrados y normales, entonces X es normal.

148. Todo conjunto F_σ de un espacio normal es un subespacio normal.

149. Sean $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots$ una sucesión de espacios, donde cada X_n es un subespacio cerrado de X_{n+1}. Sea $X = \bigcup_{n \in \omega} X_n$. Supóngase que $U \subseteq X$ se define como abierto si y sólo si $U \cap X_n$ es abierto en X_n para cada $n \in \omega$. La topología así obtenida se llama la *topología coherente* de X con los subespacios X_n.

    (a) Si X tiene la topología coherente con una sucesión de espacios $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots$, entonces cada X_n es un subespacio de X.

    (b) Si cada subespacio X_n es normal, entonces X mismo es normal.

150. Si J es no numerable entonces $\mathbb{R}^J$ no es un espacio normal.

151. Existen un espacio normal X, un espacio T_1 que no es Hausdorff Y y una función abierta y sobreyectiva $f : X \to Y$. ¿Cuáles son?

152. Si X es cero dimensional y cada conjunto G_δ tiene interior no vacío, entonces todo subespacio de tamaño $\aleph_1$ es normal.

153. Si $\mathcal{G}$ es una familia de conjuntos, un *refinamiento* de $\mathcal{G}$ es una familia $\mathcal{H}$ tal que cualquier elemento de $\mathcal{H}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{G}$ y además $\bigcup \mathcal{G} = \bigcup \mathcal{H}$. Si una cubierta $\mathcal{G}$ tiene un refinamiento de cardinalidad κ, entonces $\mathcal{G}$ incluye una subcubierta de cardinalidad menor o igual a κ.

154. Sean τ_0 y τ_1 dos topologías sobre X. Si X es Hausdorff y compacto con ambas topologías, entonces o bien $\tau_0 = \tau_1$ o ellas no son compatibles.

155. Un espacio topológico X se llama *localmente numerable* si cada uno de sus puntos tiene una vecindad (abierta) numerable. Demuestre que un espacio regular y localmente numerable es un espacio completamente regular y totalmente disconexo (de hecho, cero dimensional).

156. Todo subconjunto compacto de un espacio métrico es acotado con esa métrica y es también cerrado. Encuentre un espacio métrico en el cual no todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.

157. Considere el espacio producto $X \times Y$ donde Y es compacto. Si N es un conjunto abierto de $X \times Y$ tal que $\{x_0\} \times Y \subseteq N$, para algún $x_0 \in X$, entonces existe una vecindad W de x_0 tal que $N \supseteq W \times Y$.

158. Sea p una función continua suprayectiva y cerrada de X en Y tal que $p^{-1}(\{y\})$ es compacto para cada y de Y. Pruebe que si Y es compacto, entonces X es compacto.

159. Si dos espacios compactos de Hausdorff son equipotentes y tienen precisamente un punto no aislado, entonces ellos son homeomorfos.

160. Sea $f : X \to Y$, siendo Y compacto y Hausdorff. Entonces f es continua si y sólo si la gráfica de f,

$$G_f = \{\langle x, f(x)\rangle : x \in X\},$$

es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.

161. Un espacio Hausdorff X es compacto si y sólo si todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación completo. Recuerde que $x \in X$ es *punto de acumulación completo* de $A \subseteq X$ si $|A| = |A \cap V|$ para cada vecindad V de x.

162. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos cerrados y conexos de X la cual está linealmente ordenada por la inclusión. Entonces $Y = \bigcap \mathcal{A}$ es conexo y no vacío.

163. Si X es compacto, $K \subseteq X$ es cerrado y $p \in X \setminus K$, entonces existen A y B que son cerrados G_δ en X tales que $p \in A$, $K \subseteq B$ y $A \cap B = \emptyset$.

164. Se dice que un espacio X tiene *estrechez numerable* si siempre que $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$ existe $B \subseteq A$ numerable y tal que $x \in \overline{B}$.

    (a) Si X es un espacio secuencial, entonces X tiene estrechez numerable.

    (b) Hay espcios con estrechez numerable que no son secuenciales.

    (c) Si X es un espacio linealmente ordenado y tiene estrechez numerable, entonces X es un espacio primero numerable.

165. Sean X un espacio Hausdorff y Y un espacio regular, $f : X \to Y$ una función. Sea $A \subseteq X$ definido por: $a \in A$ si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero es diferente a $f(a)$. Defínase $\varphi : X \to Y$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lim_{z\to x} f(z), & \text{si } x \in A \\ f(x), & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Demuestre que:

(a) φ es continua en A,

(b) φ es continua en todo punto en el que f es continua,

(c) si Y es un espacio métrico y $A_n = \{x \in A : d(f(x), \varphi(x)) \geq \frac{1}{n}\}$, entonces A_n es discreto.

(d) si Y es un espacio métrico y segundo numerable, entonces A es a lo más numerable.

166. Sea $C_p(I, I)$ el conjunto de funciones continuas del intervalo $I = [0, 1]$ hacia sí mismo con la topología de la convergencia puntual, entonces

(a) $C_p(I, I)$ no es primero numerable,

(b) $C_p(I, I)$ no es homeomorfo a un producto de $\mathfrak{c}$ copias del intervalo $[0, 1]$,

(c) todo punto de $C_p(I, I)$ es un conjunto de tipo G_δ.

167. (Lema de Alexander) Si un espacio tiene una subbase $\mathcal{S}$ tal que cualquier cubierta de X por elementos de $\mathcal{S}$ tiene una subcubierta finita, entonces X es compacto.

168. El conjunto ternario de Cantor es el que se obtiene de la construcción clásica removiendo el intervalo de enmedio de una sucesión de intervalos cuyas longitudes tienden a cero. El conjunto ternario de Cantor es homeomorfo a 2^ω con la topología producto.

169. El subespacio de los números irracionales es homeomorfo a ω^ω.

170. $[0, 1]^2$ es imagen continua de $[0, 1]$ asimismo $\mathbb{R}^n$ es imagen continua de $\mathbb{R}$.

171. ¿Es $\mathbb{R}^\omega$, con la topología producto, imagen continua de $\mathbb{R}$?

172. Sean X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un compacto $C \subseteq X$ tal que para todo $x \in X \setminus C$ se verifica que $f(x) \geq \varepsilon$.

(a) Demuéstrese que existe un punto $a \in X$ tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

(b) Demuéstrese que X debe ser localmente compacto.

(c) Demuéstrese que $\{x \in X : f(x) = f(a)\}$ es compacto, donde a es el punto cuya existencia se afirma antes.

173. Cualquier cubo de Tychonoff $[0,1]^{\kappa}$ es la imagen continua de un conjunto generalizado de Cantor 2^{λ}.

174. Use el espacio $2^{\mathfrak{c}}$ para obtener un espacio numerable que no tiene una base local numerable en ninguno de sus puntos.

175. Muestre que el conjunto $\left\{x \in \ell_2 : (\forall n \in \omega)\left(|x_n| \leq \frac{1}{n+1}\right)\right\}$ es un subconjunto compacto de ℓ_2 con su norma usual.

176. Sean X un espacio y $F \subseteq X$, defina

$$\chi(F, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de vecindades para } F\} + \omega,$$

este número cardinal se llama el carácter de F en X. Defina también

$$\psi(F, X) = \min\left\{|\mathcal{G}| : \mathcal{G} \text{ es una fam. de abiertos tal que } F = \bigcap \mathcal{G}\right\} + \omega,$$

este número cardinal se llama el pseudocarácter de F en X.

(a) Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo y $F \subseteq X$, entonces $\chi(F, X) = \chi(f[F], Y)$ y $\psi(F, X) = \psi(f[F], Y)$.

(b) Existen espacios X tales que para cada $x \in X$ se tiene que

$$\psi(\{x\}, X) < \chi(\{x\}, X).$$

(c) Si X es un espacio compacto, entonces $\psi(F, X) = \chi(F, X)$ para cada $F \subseteq X$.

177. Si X es un espacio compacto y existe una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X (no necesariamente abiertos) tal que para cada abierto U y cada punto $x \in U$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$, entonces X tiene una base $\mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{N}|$.

178. (Doble círculo de Alexandroff) Los puntos de X son los puntos de dos círcunferencias concéntricas S_0 (la interior) y S_1 (la exterior). Una vecindad abierta de un punto $x \in S_0$ es la unión de un intervalo en S_0 que contiene a este punto y la proyección de este intervalo sobre S_1 a excepción de la proyección del punto x. Todos los puntos de S_1 son declarados aislados. Entonces X es un espacio Hausdorff compacto sin una base numerable pero tiene una base numerable en cada uno de sus puntos y es la unión de dos de sus subespacios metrizables.

179. (El espacio de Kelly) Sea X el conjunto de todas las funciones no decrecientes del intervalo $[0,1]$ en sí mismo. Considere en X la topología de la convergencia puntual. Entonces X no es metrizable, es separable, compacto y primero numerable.

180. (Espacio dos estrellas de Alexandroff) Considere $X_0 = [0, 1) \times \{0\}$ y $X_1 = (0, 1] \times \{1\}$. Sea $X = X_0 \cup X_1$ con la topología generada tomando como base de abiertos los conjuntos de la forma

$$W_1 = [a, b) \times \{0\} \cup (a, b) \times \{1\} \quad \text{y} \quad W_2 = (a, b) \times \{0\} \cup (a, b] \times \{1\}\,.$$

Entonces X tiene las siguientes propiedades:

(a) X es Hausdorff,

(b) X es compacto,

(c) X admite una función perfecta (i.e. sobreyectiva, cerrada y con fibras compactas) sobre un segmento de la línea real,

(d) X es hereditariamene Lindelöf,

(e) X es perfectamente normal,

(f) X es primero numerable,

(g) X es separable,

(h) X no tiene base numerable,

(i) X no es metrizable,

(j) cualquier subespacio metrizable de X es a lo más numerable,

(k) $X \times X$ no es completamente normal.

181. ¿Si X y Y son hereditariamente separables, es $X \times Y$ hereditariamente separable?

182. Sea τ la topología generada sobre $\mathbb{R}$ por intervalos de la forma $[a, b)$, donde $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{R}$. Denótese por Y al espacio resultante.

(a) ¿Es Y^2 un espacio de Lindelöf?

(b) ¿Existe una función continua y sobreyectiva $f : Y \to \mathbb{N}$? Aquí $\mathbb{N}$ tiene su topología usual; es decir, discreta.

(c) ¿Existe una función continua y sobreyectiva $f : Y \to \mathbb{R}$ si $\mathbb{R}$ tiene la topología discreta?

183. Un espacio Hausdorff se llama *numerablemente compacto* si cualquier cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita.

Todo espacio compacto es numerablemente compacto; pero hay espacios numerablemente compactos que no son compactos. Uno de ellos es ω_1 con su topología del orden.

184. Un espacio X es numerablemente compacto si y sólo si toda familia numerable de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

185. Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio Hausdorff:

(a) El espacio X es numerablemente compacto.

(b) Cualquier familia localmente finita de subconjuntos no vacíos es finita.

(c) Cualquier familia localmente finita de subconjuntos de X consistentes de un punto es finita.

(d) Cualquier subconjunto infinito tiene un punto de acumulación.

(e) Todo subconjunto infinito numerable de X tiene un punto de acumulación.

186. Si X es numerablemente compacto y Y es compacto, entonces $X \times Y$ es numerablemente compacto. (Hay ejemplos de espacios numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto.)

187. Un espacio Hausdorff X es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

Cualquier espacio secuencialmente compacto es numerablemente compacto.

188. Si X es primero numerable y numerablemente compacto, entonces X es secuencialmente compacto.

189. En un espacio Hausdorff secuencial y compacto, la cardinalidad de la clausura de un subconjunto numerable no excede $\mathfrak{c}$.

190. (El Lema del número de Lebesgue) Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de un espacio métrico (X, d). Si X es compacto, existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X teniendo diámetro menor que δ está contenido en un elemento de $\mathcal{A}$.

191. Si X es un espacio Hausdorff compacto y $|X| \leq \aleph_1$, entonces X es primero numerable en al menos un punto.

192. Si κ es un cardinal, una sucesión $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ en un espacio X se llama *sucesión libre de longitud* κ si para cada $\beta < \kappa$ se tiene que

$$\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \cap \overline{\{x_\alpha : \beta \leq \alpha < \kappa\}} = \emptyset.$$

Si X es un espacio compacto con estrechez numerable, entonces no tiene una sucesión libre de longitud ω_1.

193. Supóngase que X es un espacio Hausdorrf y que toda cubierta abierta de X que es punto numerable es numerable. ¿Es X seprable?

194. El producto cartesiano de una familia numerable de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto.

195. Si X es numerablemente compacto y Y es secuencialmente compacto, entonces $X \times Y$ es numerablemente compacto.

196. Para un espacio métrico las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es compacto.
(b) X es numerablemente compacto.
(c) X es secuencialmente compacto.

197. Si X es un espacio métrico compacto en el cual la cerradura e cada bola abierta es la bola cerrada, entonces toda bola abierta es conexa.

198. Sea G un subgrupo del grupo aditivo de $\mathbb{R}$. Entonces G es denso en $\mathbb{R}$ si y sólo si no existe $g \in G$ tal que $G = \{ng : n \in \mathbb{Z}\}$.

199. Cierto o falso: Cualquier compacto hereditariamente separable tiene una π-base numerable. Una π-base es una familia $\mathcal{W}$ de abiertos tal que cualquier abierto no vacío del espacio contiene un elemento de $\mathcal{W}$.

200. Tal y como se define una π-base (global) se puede definir π-bases locales: Una π-*base local* para $x \in X$ es una familia $\mathcal{G}$ de subconjuntos abiertos de X tales que siempre que U sea un abierto tal que $x \in U$ se tiene que $U \supseteq V$, para algún $V \in \mathcal{G}$. Se dice que un espacio X tiene π-*carácter numerable* si cada en cada uno de sus puntos tiene una π-base local numerable.

    Si X es compacto y no tiene π-carácter numerable, entonces X tiene una sucesión libre de longitud ω_1.

201. Si X es secuencial y compacto, U es un conjunto no vacío que es abierto en X, entonces existe un conjunto $F \subseteq U$ el cual es cerrado en X, es G_δ en X y $|F| \leq \mathfrak{c}$.

202. Si X es Hausdorff, secuencial y compacto, entonces X tiene un subconjunto denso en el que cada punto tiene una base de vecindades cuya cardinalidad no excede $\mathfrak{c}$.

203. Si se supone CH, entonces cualquier espacio secuencial y compacto es primero numerable en un conjunto denso de puntos.

204. Un producto topológico $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es localmente compacto si y sólo si X_α es localmente compacto para todo $\alpha \in I$ y existe un conjunto finito $J \subseteq I$ tal que X_α es compacto para todo $\alpha \in I \setminus J$.

205. Cualquier subespacio localmente compacto M de un espacio Hausdorff X es un subconjunto abierto de la clausura $\overline{M}$ en el espacio X; es decir, puede representarse en la forma $F \cap U$ donde F es un cerrado en X y U es un abierto en X.

206. Sea A un conjunto no numerable con la topología discreta y sea X su compactación por un punto. Considere también a $Y = A \cup \{\infty\}$ con la topología discreta.

    (a) Todo subconjunto de tipo G_δ de X es abierto. A los espacios con esta propiedad se les conoce como P-espacios.

(b) Use el punto anterior para deducir que no hay sucesiones no triviales en X que sean convergentes.

(c) X no es secuencial.

(d) La función identidad de X en Y no es continua pero sí es secuencialmente continua.

207. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y Y un conjunto. Defina una topología τ_f^* sobre Y tomando como subbase a la familia $\{f(U) : U \in \tau_X\}$.

(a) La función f de (X, τ_X) en (Y, τ_Y^*) es abierta. ¿Será continua?

(b) Sean $X = [-1, 1] \cup [2, 3]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ y Y el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos $[-1, 1] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [-1, 1]$. Defina una función que haga corresponder linealmente $[-1, 1]$ con el primer segmento y $[2, 3]$ con el segundo. Sea τ_f^* la topología asociada con f como se definió arriba. ¿Es f continua respecto a estas topologías?

(c) ¿Es siempre posible tener una topología sobre Y de modo que para una función dada $f : X \to Y$ de un espacio X en el conjunto Y, esta función es continua y abierta?

208. Un espacio completamente regular es *pseudocompacto* si cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

(a) Encuentre un espacio pseudocompacto que no sea compacto.

(b) Cualquier espacio métrico y pseudocompacto es compacto.

209. Para un espacio métrico (X, d) son equivalentes:

(i) X es segundo numerable

(ii) X es de Lindelöf

(iii) X es separable.

210. La imagen continua de un espacio paracompacto no necesariamente es paracompacto.

211. Un espacio Hausdorff es *metacompacto* si cada cubierta abierta de X tiene un refinamento que cubre X y que además es abierto y punto$-$finito.

(a) Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta y punto-finito de X, entonces $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta *irreducible* $\mathcal{V}$; es decir, ninguna subcolección propia de $\mathcal{V}$ cubre X.

(b) Un espacio Hausdorff numerablemente compacto y metacompacto es compacto.

212. Sea X un espacio paracompacto. Si cualquier subespacio abierto de X es paracompacto, entonces cualquier subespacio de X es paracompacto.

213. (a) Cualquier espacio paracompacto con un subespacio denso de Lindelöf es de Lindelöf.

(b) Un espacio paracompacto y separable es de Lindelöf.

(c) Si X es Lindelöf y F es un subconjunto cerrado de βX que no es de tipo G_δ y el cual está contenido en $\beta X \setminus X$, entonces $\beta X \setminus F$ no es paracompacto.

214. Sea X localmente compacto, paracompacto y Hausdorff. Muestre que existe un subconjunto *clopen* no vacío y [redacted]-compacto (posiblemente X , mismo).

215. Dar un compacto que no sea imagen continua de un espacio 2^κ para algún κ.

216. Si X es un espacio compacto y $X \times X \times X$ es completamente normal, entonces X debe tener una base numerable.

217. La completación de un espacio métrico (X, d) es un espacio compacto si y sólo si X es totalmente acotado.

218. Un espacio separable, metrizable y cero dimensional es homeomorfo a un subespacio de ω^ω.

219. Cualquier espacio métrico y compacto es imagen continua del conjunto de Cantor.

220. Demuestre que si X es un espacio métrico numerable y sin puntos aislados, entonces X es homeomorfo a $\mathbb{Q}$, los racionales con su topología usual.

221. Un espacio métrico compacto es la imagen continua del conjunto de Cantor bajo una función irreducible si y sólo si dicho espacio no tiene puntos aislados. Recuerde que una función sobreyectiva $f : X \to Y$ se llama irreducible si no existe $F \subsetneq X$ cerrado tal que $f \restriction F : F \to Y$ siga siendo sobreyectiva.

222. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Entonces el conjunto de puntos donde f es continua es un conjunto G_δ. Concluya que no existe una función continua exactamente sobre $\mathbb{Q}$. ¿Hay una que sea continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

223. ¿Es posible cubrir $\mathbb{R}^2$ con las gráficas de una cantidad numerable de funciones continuas o las inversas (en caso que existan) de funciones continuas?

224. Un espacio métrico X es *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F \subseteq X$ tal que $X = \bigcup \{B(x; \varepsilon) : x \in F\}$.

Un espacio métrico X es compacto si y sólo es completo y totalmente acotado.

225. Toda métrica sobre un espacio compacto es completa.

226. Un espacio métrico localmente compacto tiene una base que es localmente numerable; es decir, cada punto tiene una vecindad la cual, como subespacio de X, es segundo numerable.

227. Un espacio metrizable es localmente compacto y segundo numerable si y sólo si es homeomorfo a un subespacio abierto y denso de un espacio compacto metrizable.

228. Dar un ejemplo de un subespacio localmente compacto X de $\mathbb{R}$ cuyo complemento $\mathbb{R} \setminus \mathbb{X}$ no es localmente compacto.

229. Se dice que dos métricas d_0 y d_1 sobre un conjunto X son *equivalentes* si ellas generan la misma topología sobre X.

Dos métricas d_0 y d_1 sobre un conjunto X son equivalentes si y sólo si ellas inducen las mismas sucesiones convergentes.

230. Un espacio X es un *espacio de Baire* si $\bigcup_{n\in\omega} N_n$ tiene interior vacío para cualquier colección $\{N_n : n \in \omega\}$ de conjuntos cerrados con interior vacío.

Cualquier subespacio abierto de un espacio de Baire es un espacio de Baire.

231. Si cada punto de X tiene una vecindad que es un espacio de Baire, entonces X es un espacio de Baire.

232. Si Y es un subespacio G_δ de un espacio Hausdorff y compacto o un espacio métrico completo, entonces Y es un espacio de Baire.

233. ¿Es $\mathbb{R}_\ell$ un espacio de Baire?

234. ¿Es $\mathbb{R}^\kappa$ un espacio de Baire? Aquí κ es un cardinal infinito.

235. Si A es cualquier conjunto G_δ entonces existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continua exactamente sobre A.

236. Sea $D(\kappa)$ el espacio discreto de cardinalidad $\kappa \geq \aleph_0$. Sea $B(\kappa) = [D(\kappa)]^{\aleph_0}$. Entonces lo siguiente define una métrica sobre $B(\kappa)$: Para cada $x, y \in B(\kappa)$ sea

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & \text{si } x \neq y \ \& \ k = \min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\} \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

A $B(\kappa)$ con esta métrica se le llama el *espacio de Baire de peso* κ. Una sucesión $\langle x_m : m \in \omega \rangle$ en $B(\kappa)$ converge a un punto $x \in B(\kappa)$ si y sólo si para cada $i \in \omega$ existe $k_i \in \omega$ tal que $x(i) = x_m(j)$ para cada $j \geq k_i$.

237. Sea d la métrica discreta sobre $D(\kappa)$ y sea

$$\sigma(x,y) = \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n} d(x(n), y(n)),$$

para cada $x, y \in B(\kappa)$. Se sabe que σ define otra métrica sobre $B(\kappa)$. Entonces una sucesión $\langle x_m : m \in \omega \rangle$ en $B(\kappa)$ converge a un punto $x \in B(\kappa)$ si y sólo si para cada $i \in \omega$ existe $k_i \in \omega$ tal que $x(i) = x_m(j)$ para cada $j \geq k_i$; es decir, la misma condición del ejercicio anterior. Concluya que σ y ϱ son métricas equivalentes sobre $B(\kappa)$.

238. El espacio de Baire $B(\omega)$ es homeomorfo al subespacio de los números irracionales de $\mathbb{R}$.

239. Si X, Y son espacios métricos y $f : X \to Y$ es una función continua que transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. ¿Es f uniformemente continua?

240. Si X es un espacio métrico en el que para toda pareja de abiertos ajenos U y V se tiene que las cerraduras de U y V son ajenas; entonces X es discreto.

241. Para toda cubierta finita $\mathcal{F}$ formada por conjuntos cerrados de un espacio métrico compacto X hay un número $\delta > 0$ tal que para cada $A \subseteq X$ que tiene diámetro a lo más δ, la familia $\{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}$ tiene intersección no vacía.

242. Una isometría de un espacio métrico compacto X en sí mismo es sobreyectiva. ¿Es la misma afirmación cierta para un espacio métrico completo?

243. Si (X, d) es un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función sobreyectiva tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para cada par $x, y \in X$, entonces f es una isometría.

244. Todo espacio metrizable y compacto X es una imagen continua del conjunto de Cantor.

245. Salvo homeomorfismo, el conjunto de Cantor es el único espacio cero dimensional, metrizable, compacto y sin puntos aislados.

246. Sea X un espacio metrizable y localmente compacto. Demuestre que $A(X)$, la compactación por un punto de X, es metrizable si y sólo si X es separable.

247. Un par de subconjuntos A y B de un espacio X están *completamente separados* si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$.

     Todo par de subconjuntos completamente separados de un espacio Tychonoff tienen clausuras ajenas en su compactación de Čech-Stone.

248. Todo par de conjuntos cerrados de un espacio normal X tienen clausuras ajenas en βX.

249. Si un subespacio M de un espacio de Tychonoff X tiene la propiedad de que cualquier función continua $f : M \to [0,1]$ es continuamente extendible sobre X, entonces la clausura $\overline{M}$ de M en βX es una compactación equivalente a βM.

250. Para cualquier espacio de Tychonoff X y cualquier T tal que $X \subseteq T \subseteq \beta X$ se tiene que $\beta T = \beta X$.

251. Sea X un espacio de Tychonoff y supóngase que X es un subespacio abierto de βX y que los puntos de X son de tipo G_δ. Demuestre que X debe ser primero numerable.

252. Todo conjunto cerrado e infinito $F \subseteq \beta\omega$ contiene un subespacio homeomorfo a $\beta\omega$; en particular, F tienen cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$.

253. El espacio $\beta\omega$ no tiene subespacios homeomorfos a $A(\omega)$; es decir, en $\beta\omega$ no hay sucesiones convergentes no triviales.

254. La compactación por un punto de un espacio métrico localmente compacto también es un espacio metrizable si y sólo si X es segundo numerable.

255. Dadas dos compactaciones K_0 y K_1 de un espacio X se dice que $K_0 \leq K_1$ si existe una función continua y sobreyectiva $f : K_1 \to K_0$ tal que $f \restriction X$ es la identidad en X. Esta relación $\leq$ define un orden en cualquier conjunto de compactaciones de un espacio Tychonoff X. Además, para cualquier compactación K de X se tiene que $K \leq \beta X$.

256. $A(\kappa)$ es la compactación por un punto del espacio discreto de cardinalidad κ, $D(\kappa)$ y asimismo $A(\kappa) \times \{0, 1, \ldots n-1\}$ una compactación de $D(\kappa)$, para todo $n \in \omega$.

257. Demuestre que el conjunto de Cantor es una compactación de los irracionales.

258. El doble círculo de Alexandroff es una compactación del espacio discreto $D(\mathfrak{c})$ y esta compactación es incomparable (en el orden $\leq$ definido entre compactaciones) a la compactación $A(\mathfrak{c}) \times A(\mathfrak{c})$.

259. Existe una función continua $f : D(\mathfrak{c}) \to [0,1]$ la cual no es continuamente extendible a las compactaciones de $D(\mathfrak{c})$ del ejercicio anterior.

260. La función $f : \omega \times \omega \to [0,1]$ definida por $f(m,n) = \frac{m}{m+n+1}$ para $\langle m, n \rangle \in \omega \times \omega$ no es continuamente extendible a $\beta\omega \times \beta\omega$; deduzca que $\beta\omega \times \beta\omega$ no es la compactación de Čech-Stone de $\omega \times \omega$.

261. Para todo espacio Hausdorff, compacto y separable X, el producto cartesiano $X \times (\omega_1 + 1)$ es la compactación de Čech-Stone de $X \times \omega_1$.

262. Para cualquier compactación Y de un espacio X se tiene que $|Y| \leq 2^{2^{|D|}}$, donde D es cualquier subespacio denso de X. Existe un conjunto $\mathcal{K}^*(X)$ tal que para cualquier compactación de X se tiene que $\mathcal{K}^*(X)$ contiene un espacio homeomorfo a tal compactación.

263. Si en la familia $\mathcal{K}^*(X)$ de las compactaciones de un espacio Tychonoff no compacto X existe un espacio Y que es el mínimo en el orden $\leq$ de las compactaciones de X, entonces X es localmente compacto y Y es homeomorfo a la compactación de Alexandroff $A(X)$ de X.

264. Supóngase que X es un espacio regular y Lindelöf. Entonces ningún subconjunto numerable e infinito del espacio $\beta X \setminus X$ es cerrado en βX.

265. Sea X un espacio completamente regular y sea K una compactación de X. Sea R el conjunto de todos los puntos de X en los cuales X no es localmente compacto. Entonces $R = \operatorname{cl}(K \setminus X) \setminus (K \setminus X)$.

266. ¿Cierto o falso: todo espacio paracompacto con una base σ-ajena es metrizable?

267. ¿Cierto o falso: todo espacio perfectamente normal con una base σ-ajena es metrizable?

268. ¿Cierto o falso: todo espacio regular y Lindelöf con una base punto numerable es metrizable?

269. Si un espacio paracompacto es localmente metrizable, entonces es metrizable.

270. Un espacio paracompacto, localmente metrizable por una métrica completa, es metrizable por una métrica completa.

271. Un espacio métrico es metrizable por una métrica completa si y sólo si es Čech-completo; *id est,* es un G_δ en una (y de hecho en toda) compactación de X.

272. Un producto numerable de espacios Čech-completos es un espacio Čech-completo.

273. Cualquier subespacio G_δ de un espacio Čech-completo es también un espacio Čech-completo.

274. Un espacio localmente metrizable, localmente compacto, Hausdorff y débilmente paracompacto es metrizable. Un espacio es *débilmente paracompacto* (también llamado *metacompacto*) si toda cubierta abierta tiene un refinamiento punto finito.

275. ¿Es todo espacio metrizable localmente compacto es representable como la unión de una familia de subconjuntos *clopen* de X, cada uno de los cuales es la unión de una familia numerable de compactos?

276. Dar un ejemplo de un espacio normal y separable que no sea paracompacto.

277. ¿Existe un espacio numerable y paracompacto que no es primero numerable en alguno de sus puntos?

278. La paracompacidad es hereditaria con respecto a conjuntos F_σ.

279. Un espacio paracompacto y perfectamente normal es hereditariamente paracompacto.

280. Si un espacio X es hereditariamente paracompacto y tiene celularidad numerable, entonces X es un espacio Lindelöf.

281. ¿Es perfectamente normal un espacio compacto el cual todos sus subespacios son paracompactos?

282. ¿Es perfectamente normal un espacio hereditariamente paracompacto y primero numerable?

283. Sea X un espacio metrizable con una base de cardinalidad $\kappa \geq \aleph_0$. Entonces existe una función perfecta $f : B(\kappa) \to X$, donde $B(\kappa)$ es el espacio de Baire de peso κ. Recuerde que una función es perfecta si es continua, cerrada, sobreyectiva y tiene fibras compactas.

284. Cualquier espacio metrizable tiene una compactación primero numerable.

285. Un espacio T_1 X es metrizable si y sólo si existe una familia de cubiertas abiertas $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ tales que para cualquier punto $p \in X$ y cualquier vecindad Ude p, existe una vecindad V de p tal que $\bigcup\{W \in \mathcal{U}_n : W \cap V \neq \emptyset\} \subseteq U$ para alguna $n \in \omega$.