TAREA I
EJERCICIO 5.

Si $\kappa \in CAR$ es infinito y $\sqsubset$ es un buen orden para κ, entonces hay $X \subseteq \kappa$ tal que $|X| = \kappa$ y $\sqsubset_{\restriction X} = \in_{\restriction \kappa}$.

Prueba :

Obsérvese que $otp(\kappa, \sqsubset) \geq otp(\kappa, \in) = \kappa$. Así, sin perder generalidad podemos suponer que $otp(\kappa, \sqsubset) = \kappa$. Sea $X = Cam(\sqsubset \cap \in)$. Es decir, $X = dom(\sqsubset \cap \in)) \cup Im(\sqsubset \cap \in))$.

Afirmamos lo siguiente:

1. $|X| = \kappa$
2. $\sqsubset_{\restriction X} = \in_{\restriction X}$

Probaremos 1 y 2 para κ regular y después para κ singular.

A) κ es regular.

1. Para que $|X| = \kappa$, como κ es regular basta ver que X es no acotado en κ. Supongamos que lo es. Entonces hay $\alpha_1 \in \kappa$ tal que $\forall \beta \in X(\beta \in \alpha_1)$, y hay $\alpha_2 \in \kappa$ tal que $\forall \beta \in X(\beta \sqsubset \alpha_2)$. (Si no hubiera tal α_2 acotando a X con respecto a $\sqsubset$, entonces X sería cofinal en $(\kappa, \sqsubset)$. Sin embargo, $X \subset \alpha_1 < \kappa$ implica que el tipo de orden de X es estrictamente menor que κ, digamos γ. Pero entonces podríamos encontrar una γ-sucesión cofinal en $(\kappa, \sqsubset)$ contradiciendo nuestra suposición inicial sobre su tipo de orden y la regularidad de κ).

Así, para cada $\lambda \in \kappa$ tal que $\alpha_1 \in \lambda$, tenemos que $\lambda \sqsubset \alpha_2$ (de lo contrario λ guardaría la misma relación con los elementos de X y por ello λ sería un elemento de X, contradiciendo el hecho de que X es acotado). Lo anterior es una contradicción al principio del palomar, pues entre α_1 y κ hay κ elementos, y estarían todos metidos en α_2, que es estrictamente menor que κ.

Por lo tanto X es no acotado en κ. Por lo tanto $|X| = \kappa$.

2. es claro por la construcción de X.

B) κ es singular.

Sea $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ una sucesión estrictamente creciente de cardinales regulares tal que $\forall \alpha \in \lambda(\kappa_\alpha < \kappa)$ y $\bigcup\limits_{\alpha \in \lambda} \kappa_\alpha = \kappa$. Para cada $\alpha \in \lambda$ definimos $X_\alpha = X \cap \kappa_\alpha$. Por A) tenemos que $|X_\alpha| = \kappa_\alpha$, y $|X| = \bigcup\limits_{\alpha \in \lambda} |X_\alpha| = \bigcup\limits_{\alpha \in \lambda} \kappa_\alpha = \kappa$.

Es claro que $\sqsubset_{\restriction X} = \in_{\restriction X}$.