Ejercicios III
Pregunta 5.

Demuestre que lo siguiente es inconsistente: Existen $A_\alpha \subseteq \alpha$ para $\alpha < \omega_1$ tales que para todo estacionario $A \subseteq \omega_1$, existe $\alpha \in A$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$

Antes de dar la prueba, recordemos el *Pressing Down Lemma*:

Sea $\kappa > \omega$ regular, S un subconjunto estacionario de κ y $f : S \to \kappa$ tal que $\forall \gamma \in S(f(\gamma) < \gamma)$; Entonces para algún $\beta < \kappa$, $f^{-1}[\beta]$ es estacionario.

Prueba: Supongamos que existen $A_\alpha \subseteq \alpha$ para $\alpha \in \omega_1$ que cumplen la afirmación. Dado que ω_1 es estacionario, (digamos en el papel de S para usar el *Pressing Down Lemma*) y que ω_1 es regular y mayor que ω (en el papel de κ), podemos definir una función $f : \omega_1 \to \omega_1$ como sigue: $f(\alpha) = x_\alpha$ donde $x_\alpha \in A_\alpha$. Entonces, como $A_\alpha \subseteq \alpha$ y $x_\alpha \in A_\alpha$, se tiene $f(\alpha) < \alpha$.

Por el lema *Pressing Down*, existe un $\beta \in \omega_1$ tal que $f^{-1}[\beta]$ es estacionario.

Sea $B = f^{-1}[\beta]$. Por la afirmación, existe $\alpha \in B$ tal que

$$B \cap \alpha = A_\alpha$$

Entonces, como $\alpha \in B = f^{-1}[\beta]$, $f(\alpha) = \beta$. Además, $f(\alpha) \in A_\alpha$ por lo tanto $\beta \in A_\alpha$ y como $B \cap \alpha = A_\alpha$, entonces $\beta \in B \cap \alpha$ en particular, $\beta \in B$, lo cual significa que $f(\beta) = \beta$, contradiciendo el hecho que $f(\beta) \in A_\beta$, en particular que $f(\beta) < \beta$.