Ejercicio 1

Segunda parte

Ahora probaremos que *Prop* implica el AE

Sea $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos. Sin perder generalidad, supongamoslos ajenos dos a dos.

Para cada $\alpha \in I$ Sea τ_α la topología cofinita en el conjunto A_α.

Consideremos el conjunto

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

con la topología τ definida como sigue:

$G \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ es abierto *syss* para cada $\alpha \in I$, $(G \cap A_\alpha) \in \tau_\alpha$.

Es fácil ver que τ así definida es una topología para el conjunto $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ y que $F \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ es cerrado *syss* para cada $\alpha \in I$, $F \cap A_\alpha$ es cerrado en A_α

Definimos la siguiente función:

$f : \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \to I$ definida por $f(x) = \beta \in I$ donde A_β es el conjunto tal que $x \in A_\beta$ (como es una unión de conjuntos ajenos, para cada $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ hay sólo un elemento de la familia al cual x pertenece, por lo que la función está bien definida).

Consideremos al conjunto de indices I con la topología discreta. Entonces, la función f es una función perfecta.

f es continua. Sea $B \subseteq I$, veamos que $f^{-1}[B] \in \tau$.

Para cada $\alpha \in I$, $(f^{-1}[B] \cap A_\alpha) \in \tau_\alpha$ (Si $\alpha \in B$, entonces $f^{-1}[B] \cap A_\alpha = A_\alpha$; Si $\alpha \notin B$ entonces $f^{-1}[B] \cap A_\alpha = \phi$, en cualquiera de los dos casos, $f^{-1}[B] \cap A_\alpha \in \tau_\alpha$ por lo tanto $f^{-1}[B] \in \tau$). Asi, f es continua.

f es cerrada. Esto es trivial porque la topología de I es la discreta, por lo tanto $f[H]$ es cerrado, para cualquier $H \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, en particular, para H cerrados.

$f^{-1}[\alpha]$ es compacto, para cada $\alpha \in I$. $f^{-1}[\alpha] = A_\alpha$ el cual es compacto porque tiene la topología cofinita.

Por lo tanto f es una función perfecta. Por *Prop*, f tiene una restriccion ireducible a algún subconjunto cerrado del dominio, digamos $B \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. B es cerrado, y $f[B] = Y$ y B es mínimo con respecto a la contención.

Afirmación: Para toda $\alpha \in I, |B \cap A_\alpha| = 1$.

Si $B \cap A_\alpha = \phi$ Entonces $f(x) \neq A_\alpha$ para toda $x \in B$, por lo tanto $\alpha \notin f[B]$ contradiciendo el hecho que la imagen de B es todo I.

Si $|B \cap A_\alpha| > 1$ para algún $\alpha \in I$, entonces para cualquier $C \subsetneq B \cap A_\alpha$ con C finito, el conjunto $(B \backslash A_\alpha) \cup C$ es cerrado en $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ (la intersección con cada A_β si $\beta \neq \alpha$, es la misma que la interseccion de B con A_β, en otras palabras, para cada $\beta \neq \alpha$, $B \cap A_\beta = ((B \backslash A_\alpha) \cup C) \cap A_\beta$ el cual es un cerrado en el correspondiente A_β y para α, $((B \backslash A_\alpha) \cup C) \cap A_\alpha = C$ que tambien es cerrado, por lo tanto $(B \backslash A_\alpha) \cup C$ es cerrado en la union).

De esta manera, el conjunto $(B \backslash A_\alpha) \cup C$ es un subconjunto propio de B, cerrado en $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ cuya imagen es todo I, lo cual contradice el hecho que B es minimo respecto a la contención.

Por lo tanto, $|B \cap A_\alpha| = 1$ para todo $\alpha \in I$.

Definimos una función $g : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ de la siguiente manera.

$g(\alpha) = f^{-1}[\alpha] \cap B = A_\alpha \cap B$.

La función g está bien definida porque $|B \cap A_\alpha| = 1$. De esta manera g es una función de elección. Por lo tanto $prop \Rightarrow AE$