Ejercicio III.2
Iván Martínez Ruiz

Los siguientes son equivalentes:

(a) $\Diamond$: Existe una sucesión $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que, para cada $\alpha < \omega_1$, $A_\alpha \subseteq \alpha$ y si $X \subseteq \omega_1$, entonces $\{\gamma < \omega_1 : X \cap \gamma = A_\gamma\}$ es estacionario.

(b) Existen $A_\alpha \subseteq \alpha\times\alpha$, para $\alpha < \omega_1$ tal que para todo $A \subseteq \omega_1\times\omega_1$

$$\{\alpha \in \omega_1 | A \cap (\alpha \times \alpha) = A_\alpha\}$$

es estacionario.

(c) Existen funciones $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ para $\alpha < \omega_1$, tal que para cada $f : \omega_1 \to \omega_1$:

$$(\exists \alpha < \omega_1)(f \restriction_\alpha = f_\alpha \wedge \alpha > 0).$$

(d) Existen funciones $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ para $\alpha < \omega_1$, tal que para cada $f : \omega_1 \to \omega_1$:

$$\{\alpha \in \omega_1 : f \restriction_\alpha = f_\alpha\}$$

es estacionario.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$] Sea $f : \omega_1 \times \omega_1 \to w_1$ una función biyectiva. Quisiera probar que

$$H = \{\gamma < \omega_1 : f[\gamma \times \gamma] = \gamma\}$$

es *club*.

Se sabe que $B = \{\gamma < \omega_1 : f[\gamma \times \gamma] \subseteq \gamma\}$ es un *club* Si se prueba que $C = \{\gamma < \omega_1 : f[\gamma \times \gamma] \supseteq \gamma\}$ es *club*, entonces se tendrá lo deseado.

1. C es cerrado.
Sea $\delta < \omega_1$ tal que $\sup(\delta \cap C) = \delta$. Esto es, $\bigcup_{\gamma\in\delta\cap C} \gamma = \delta$.
$f^{-1}[\delta] = \bigcup_{\gamma\in\delta\cap C} f^{-1}[\gamma] \subseteq \bigcup_{\gamma\in\delta\cap C} \gamma \times \gamma \subseteq \delta \times \delta$; y así $\delta \subseteq f[\delta \times \delta]$, es decir, $\delta \in C$.
2. C es no acotado.
Sea $\alpha < \omega_1$ y sea $\gamma_0 > \alpha$; elíjase $\gamma_1 > \gamma_0$ tal que $f^{-1}[\gamma_0] \subseteq (\gamma_1 \times \gamma_1)$. Inductivamente elíjase γ_{n+1} tal que $\gamma_{n+1} > \gamma_n$ y $f^{-1}[\gamma_n] \subseteq (\gamma_{n+1} \times \gamma_{n+1})$. Sea $\gamma = \sup\{\gamma_n : n < \omega\}$. Se cumple entonces que $\gamma \in C$.

Por lo tanto, C es *club* y ésto prueba la afirmación.

Por hipótesis, existe $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$ $A_\alpha \subseteq \alpha$, y para cada $A \subseteq \omega_1$, $\{\gamma < \omega_1 : A \cap \gamma = A_\gamma\}$ es estacionario. Para cada $\gamma < \omega_1$ defínase B_γ como sigue:

- Si $\gamma \in H$, sea $B_\gamma = f^{-1}[A_\gamma]$
- Si $\gamma \notin H$, sea $B_\gamma = \gamma \times \gamma$.

Claro que $(\forall \gamma < \omega_1)(B_\gamma \subseteq \gamma \times \gamma)$.
Sea $A \subseteq w_1 \times \omega_1$. Veamos que $E = \{\gamma < \omega_1 : A \cap \gamma \times \gamma = B_\gamma\}$ es estacionario.

Sea D un *club*. Entonces $H \cap D$ es un *club*. Entonces $\{\gamma < \omega_1 : f[A] \cap \gamma = A_\gamma\}$ es estacionario. Por lo tanto,

$$(\exists \alpha \in D \cap H)(f[A] \cap \alpha = A_\alpha).$$

Esto implica que $f[A] \cap f[\alpha \times \alpha] = A_\alpha$ y se concluye que $A \cap (\alpha \times \alpha) = f^{-1}[A_\alpha] = B_\alpha$. Por lo tanto, $\alpha \in E \cap D$ y tenemos así lo deseado.

$(b) \Rightarrow (c)$] Por hipótesis, para cada $\alpha < \omega_1$ existe $A_\alpha \subseteq \alpha \times \alpha$, tal que si $A \subseteq \omega_1 \times \omega_1$, entonces $\{\alpha \in \omega_1 | A \cap (\alpha \times \alpha) = A_\alpha\}$ es estacionario.

Sea $\alpha < \omega_1$. Si A_α es función, entonces sea $f_\alpha = A_\alpha$. En otro caso, si A_α no es función, sea $f_\alpha \equiv 0$, la función constante 0.

Ahora, sea $f : \omega_1 \to \omega_1$ una función. Se cumple que $f \subseteq \omega_1 \times \omega_1$; por tanto $B = \{\gamma \in \omega_1 | f \cap (\gamma \times \gamma) = A_\gamma\}$ es estacionario.

Por otro lado, por un resultado anterior, $C = \{\gamma < \omega_1 : f[\gamma] \subseteq \gamma\}$ es *club* Como B es estacionario entonces $C \cap B \neq \emptyset$, es decir, $(\exists \alpha < \omega_1)(f[\alpha] \subseteq \alpha \wedge f \cap (\alpha \times \alpha) = A_\alpha)$. Por tanto, $f \cap (\alpha \times \alpha) = f \upharpoonright_\alpha : \alpha \to \alpha$ es función y así $A_\alpha = f_\alpha$ es la función que estamos buscando.

$(c) \Rightarrow (d)$] Considérense los siguientes enunciados:

(e) : Existe una sucesión $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $F_\alpha \subseteq \alpha^\alpha$, $|F_\alpha| \leq \aleph_0$ y si $f : \omega_1 \to \omega_1$, existe $\alpha \geq \omega$ tal que $f \upharpoonright_\alpha \in F_\alpha$.

(f) : Existe una sucesión $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $S_\alpha \subseteq \wp(\alpha)$, $|S_\alpha| \leq \aleph_0$ y si $X \subseteq \omega_1$, existe $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha \in S_\alpha$.

(g) : Existe una sucesión $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $S_\alpha \subseteq \wp(\alpha)$, $|S_\alpha| \leq \aleph_0$ y si $X \subseteq \omega_1$, existe un ordinal límite $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha \in S_\alpha$.

(h) : Existe una sucesión $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $S_\alpha \subseteq \wp(\alpha)$, $|S_\alpha| \leq \aleph_0$ y si $X \subseteq \omega_1$, $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha \in S_\alpha\}$ es estacionario.

Probaremos :
$(c) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h) \Rightarrow (a) \Rightarrow (d)$

$(c) \Rightarrow (e)]$ Basta definir, para cada $\alpha < \omega_1$, $F_\alpha = \{f_\alpha\}$.

$(e) \Rightarrow (f)]$ Sea $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una sucesión con las propiedades dadas. Para cada $\alpha < \omega_1$, sea $F_\alpha = \{f_\alpha^n : n < \omega_1\}$ y defínase $S_n^\alpha = \{\beta \in \alpha : f_n^\alpha(\beta) = 0\}$. Por último, sea $S_\alpha = \{S_n^\alpha : n < \omega_1\}$.
Se cumple que $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisface las propiedades requeridas (si $X \subseteq \omega_1$, basta definir $f : \omega_1 \to \omega_1$, dada por $f(\beta) = 0$ si $\beta \in X$ y $f(\beta) = 0$ en otro caso).

$(f) \Rightarrow (g)]$ Sea $S_\alpha = \{S_n^\alpha : n < \omega_1\}$ como en (f); para cada $\alpha < \omega_1$, defínase $T_\alpha \subseteq \wp(\alpha)$ por $T_\alpha = \{X \cap \alpha : X \in \bigcup\limits_{n<\omega} S_{\alpha+n}\}$.
Es claro que, para cada $\alpha < \omega$, $|T_\alpha| \leq \aleph_0$.
Afirmamos que $\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es la familia que estamos buscando: Sea $X \subseteq \omega_1$ un subconjunto dado; entonces existe $\alpha \geq \omega$ tal que $X \cap \alpha \in S_\omega$.
(i) Si α es límite, no hay más que hacer.
(ii) Si α no es límite, entonces $\alpha = \eta + n$, para algún ordinal límite η y $n < \omega$. Como $X \cap \alpha \in S_{\eta+n}$, $X \cap \eta = (X \cap \alpha) \cap \eta \in T_\eta$. Por tanto, η es el ordinal límite requerido.

$(g) \Rightarrow (h)]$ Sea $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como en (g). Sea $j : \omega_1 \to \omega_1$, dada por $j(\gamma) = 2\gamma$. Nótese que si α es límite, $j \restriction: \alpha : \alpha \to \alpha$ y $ran(\omega_1 \backslash \alpha) \cap \alpha = \emptyset$.
Para cada $\alpha < \omega_1$, defínase $T_\alpha = \{j^{-1}[X] : X \subseteq S_\alpha\}$. Es claro que $T_\alpha \subseteq \wp(\alpha)$ y $|T_\alpha| \leq \aleph_0$.
Afirmamos que $\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisface (h):
Sea $X \subseteq \omega_1$. Deseamos probar que $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha \in T_\alpha\}$ es estacionario en ω_1; para ésto, sea C un *club* de ω_1. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que todo ordinal en C es límite y si $\alpha, \beta \in C$ son tales que $\alpha < \beta$, entonces $\alpha + \omega \cdot \omega \leq \beta$ (pues el conjunto de puntos límite es *club* y la intersección de dos *club* es también un *club*).

Sea $\{C_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ la ennumeración monótona de C. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $C_0 = 0$. Definamos ahora un conjunto $Z_0 \subseteq \omega_1$ por inducción:

Supóngase que hemos definido $Z_0 \cap C_\gamma$. Sea $\{\tau_n^\gamma : n < \omega\}$ una ennumeración de $\{\tau \in \omega_1 : \tau$ es límite y $C_\gamma < \gamma < C_{\gamma+1}\}$ y sea $\{X_m^\gamma : m < \omega\}$ una ennumeración de $\bigcup\limits_{n<\omega} S_{\tau_n^\gamma}$. Para cada $m < \omega$, diremos que $\rho = C_\gamma + 2m + 1 \in Z_0$ si y sólo si $\rho \notin X_m^\gamma$.

Hemos definido así Z_0.

Sea $Z = Z_0 \cup Z_1$, donde $Z_1 = j[X]$ (Z_0 consiste de los ordinales impares de Z y Z_1 de los ordinales pares). Por hipótesis, existe un ordinal límite $\alpha \geq \omega$ tal que $Z \cap \alpha \in S_\alpha$.

Afirmamos que $\alpha \in C$. Supóngase lo contrario; entonces existe $\gamma < \omega_1$ tal que $C_\gamma < \alpha < C_{\gamma+1}$. Por lo tanto, $\alpha = \tau_n^\gamma$ para algún $n < \omega$. Se cumple que $Z \cap \alpha = X_m^\gamma$, para algún $m < \omega$ (pues $Z \cap \alpha \in S_\alpha$). Entonces: $C_\gamma + 2m + 1 \in Z$ si y sólo si $C_\gamma + 2m + 1 \in Z$ si y sólo si $C_\gamma + 2m + 1 \notin X_m^\gamma = Z \cap \alpha$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\alpha \in C$. Por último, nótese que $X \cap \alpha = j^{-1}[Z_1] \cap \alpha = j^{-1}[Z] \cap \alpha = j^{-1}[Z \cap \alpha] \in T_\alpha$ (pues $Z \cap \alpha \in S_\alpha$).

$(h) \Rightarrow (a)$] La demostración aparece en la página 85 del libro de Set Theory, An Introduction..., de Kennet Kunen.

$(a) \Rightarrow (d)$] Sea $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una sucesión como en (a) y sea $j : \omega_1 \times \omega_1 \to \omega_1$ una biyección. Se verifica que $C = \{\alpha < \omega_1 : \alpha$ es límite y $j[\alpha \times \alpha] = \alpha$ es un *club* em ω_1.

Para $\alpha \in C$, sea $f_\alpha = j^{-1}[S_\alpha]$ si f_α es función, y sea $f_\alpha = \emptyset$ en otro caso. Si $\alpha \notin C$, sea $f_\alpha = \emptyset$.

Se cumple que $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es la familia deseada.

$(d) \Rightarrow (a)$] Para cada $\alpha < \omega_1$ defínase $A_\alpha := f_\alpha[\alpha]$. Nótese que $A_\alpha \subseteq \alpha$.

Sea $A \subseteq \omega_1$ y sea $f : \omega_1 \to \omega_1$ dada por $f(\alpha) = \alpha$ si $\alpha \in A$ y $f(\alpha) = minA$ si $\alpha \notin A$

Por hipótesis, $\{\gamma < \omega_1 : f \restriction_\gamma = f_\gamma\}$ es estacionario.

Afirmación: $\{\gamma < \omega_1 : f \restriction_\gamma = f_\gamma\} \subseteq \{\gamma < \omega_1 : A \cap \gamma = A_\gamma = f_\gamma[\gamma]\}$.

En efecto, sea $\gamma < \omega_1$ tal que $f \restriction_\gamma = f_\gamma$. Probemos que $A \cap \gamma = A_\gamma = f_\gamma[\gamma]$.

$\subseteq]$ Sea $\alpha \in A \cap \gamma$. Entonces se cumple que $\alpha = f(\alpha) = f \restriction_\gamma (\alpha) = f_\gamma(\alpha) \in f_\gamma[\gamma]$, y así $\alpha \in A_\gamma$.

$\supseteq]$ Si $\alpha \in A_\gamma = f_\gamma[\gamma]$; entonces $\alpha \in f \restriction_\gamma [\gamma]$. Dado que $\alpha \in A_\gamma$, se cumple que $\alpha \in \gamma$. Más aún, $\alpha \in A$ se sigue del hecho de que $f \restriction_\gamma [\gamma] \subseteq A$.

De lo anterior se concluye que $\alpha \in A \cap \gamma$, lo cual se demuestra la afirmación.

Por último, de la afirmación anterior se concluye que $\{\gamma < \omega_1 : A \cap \gamma = A_\gamma = f_\gamma[\gamma]\}$ es estacionario (en general, si $U \subseteq V$ y U es estacionario, entonces V también lo es).