Ejercicios III

April 1, 2005

1. (David) Un cardinal κ se llama de Mahlo si es inaccesible y
$$\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ es regular}\}$$
es estacionario en κ. Demuestre que para un tal κ,
$$\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es inaccesible}\}$$
es estacionario en κ.

2. (Iván) Demuestre que los siguientes son equivalentes:
   (a) $\diamondsuit$
   (b) Existen $A_\alpha \subseteq \alpha \times \alpha$ para $\alpha < \omega_1$, tales que para todo $A \subseteq \omega_1 \times \omega_1$,
   $$\{\alpha \in \omega_1 : A \cap (\alpha \times \alpha) = A_\alpha\}$$
   es estacionario.
   (c) Existen funciones $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ para $\alpha < \omega_1$ tales que, para cada $f : \omega_1 \to \omega_1$,
   $$(\exists \alpha < \omega_1)\,(f \restriction \alpha = f_\alpha \ \&\ \alpha > 0)\,.$$
   (d) Existen funciones $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ para $\alpha < \omega_1$ tales que, para cada $f : \omega_1 \to \omega_1$,
   $$\{\alpha \in \omega_1 : f \restriction \alpha = f_\alpha\}$$
   es estacionario.

3. (Pável) Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular. $\diamondsuit_\kappa$ es la afirmación de existen conjuntos $A_\alpha \subseteq \alpha$ para $\alpha < \kappa$ tales que
$$(\forall A \subseteq \kappa)\,(\{\alpha < \kappa : A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ es estacionario})\,.$$
Demuestre que $\diamondsuit_\kappa \Rightarrow 2^{<\kappa} = \kappa$ y que hay una familia de 2^κ conjuntos estacionarios que son casi ajenos por pares.

4. (Érica) Demuestre que para κ regular y no numerable, $\Diamond_\kappa$ es equivalente a la siguiente afirmación: Existen familias $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ para $\alpha < \kappa$, tales que $|\mathcal{A}_\alpha| \leq |\alpha|$ y para cada $A \subseteq \kappa$, $\{\alpha < \kappa : A \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}$ es estacionario.

5. (Osvaldo) Demuestre que lo siguiente es inconsistente: Existen $A_\alpha \subseteq \alpha$ para $\alpha < \omega_1$ tales que para todo estacionario $A \subseteq \omega_1$, existe $\alpha \in A$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$.

6. (Alejandro) Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular y sea $E \subseteq \kappa$ estacionario. $\Diamond^+(\kappa, E)$ dice que existen $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ para $\alpha \in E$ tales que $|\mathcal{A}_\alpha| \leq |\alpha|$ y para todo $A \subseteq \kappa$, existe un c.u.b. $C \subseteq \kappa$ tal que

$$(\forall \alpha \in C \cap E)\left(A \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha \ \&\ C \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha\right).$$

$\Diamond^+_\kappa$ es lo mismo que $\Diamond^+(\kappa, \kappa)$. Asimismo, $\Diamond(\kappa, E)$ dice que existen conjuntos $A_\alpha \subseteq \alpha$ para $\alpha \in E$ tales que

$$(\forall A \subseteq \kappa)\left(\{\alpha \in E : A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ es estacionario}\right).$$

Demuestre que:

$$\Diamond^+_\kappa \Rightarrow \Diamond^+(\kappa, E),$$

mientras que

$$\Diamond(\kappa, E) \Rightarrow \Diamond_\kappa.$$