Teoría de Conjuntos
Tarea No. 2.

David Meza Alcántara

26 de marzo de 2005

Ejercicio 1 *Un cardinal κ se llama de Mahlo si es inaccesible y*

$$R = \{\alpha < \kappa; \alpha \textit{ es regular}\}$$

es estacionario en κ. Demuestre que para un tal κ

$$I = \{\lambda < \kappa : \lambda \textit{ es inaccesible}\}$$

es estacionario en κ.

Solución. Sea A un subconjunto cerrado y no acotado de κ. Veamos que $A \cap I \neq \emptyset$. Sea $L = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es cardinal límite}\}$. Veamos que L es un subconjunto cerrado y no acotado de κ.

En efecto, tomando cualquier sucesión de menos que κ cardinales límite menores que κ, el límite de ésta es un cardinal límite y menor que κ, pues κ es regular. Esto prueba que L es cerrado.

Sea $\alpha < \kappa$. Supongamos que la cardinalidad de α es $\aleph_\beta$. Se prueba inductivamente que para todo $n \in \omega$, $\aleph_{\beta+n} < \kappa$, puesto que todos estos son cardinales sucesores, mientras que κ no. Además, $\aleph_{\beta+\omega} = \sup\{\aleph_{\beta+n} : n \in \omega\}$ también es menor que κ porque éste tiene cofinalidad ω, mientras que κ tiene cofinalidad κ. Claramente, $\aleph_{\beta+\omega}$ es una cardinal límite y $\alpha < \aleph_{\beta+\omega} < \kappa$. Esto prueba que L no es acotado.

Nótese que $I = R \cap L$, por definición de inaccesible. Como L y A son c.u.b., $L \cap A$ es c.u.b., y como R es estacionario, tenemos que $R \cap (L \cap A) \neq \emptyset$. Pero $R \cap L = I$, de modo que $I \cap A \neq \emptyset$, lo cual prueba que I es estacionario. ■