Alejandro Torres Ayala.

III.6. Sean $\kappa > \omega$ un caridinal regular y E un subconjunto estacionario en κ. $\Diamond^+(\kappa, E)$ es la siguiente afirmación: Existen familias $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{P}(\alpha)$, para $\alpha \in E$ tales que $\mid \mathcal{A}_\alpha \mid \leq \mid \alpha \mid$ y para cada $A \subseteq \kappa$, existe un c.u.b. $C \subset \kappa$, tal que

(a) $\forall \alpha \in C \cap E (A \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha)$ y
(a) $\forall \alpha \in C \cap E (C \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha)$.

Según esta definición tenemos que $\Diamond_\kappa^+ = \Diamond^+(\kappa, \kappa)$, es decir, hacemos $E = \kappa$. Así mismo, $\Diamond(\kappa, E)$ dice que existen subconjuntos $A_\alpha \subseteq \alpha$, para $\alpha \in E$, tales que

$$(\forall A \subseteq \kappa)(\{\alpha \in E : A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ es estacionario}).$$

Demostrar que:

$$\Diamond_\kappa^+ \Rightarrow \Diamond^+(\kappa, E),$$

mientras que

$$\Diamond(\kappa, E) \Rightarrow \Diamond_\kappa.$$

Demostración: Como estamos suponiendo $\Diamond_\kappa^+$, entonces existen familias $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{P}(\alpha)$ para $\alpha \in \kappa$ y un c.u.b. $C \subset \kappa$ que satisfacen (a) y (b) de la definición para todo $\alpha \in \kappa$ y en particular para todo $\alpha \in E$, pues $E \subseteq \kappa$. Por lo tanto, tenemos que $\Diamond_\kappa^+ \Rightarrow \Diamond^+(\kappa, E)$.

Ahora supongamos $\Diamond(\kappa, E)$ y probemos $\Diamond_\kappa$. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in E\}$ la sucesión $\Diamond(\kappa, E)$ y definamos nuestra sucesión $\Diamond_\kappa$ como $\{B_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, donde $B_\alpha = A_\alpha$ si $\alpha \in E$ y $B_\alpha = \emptyset$ si $\alpha \in (\kappa - E)$. Por lo tanto, si B es un subconjunto de κ, entonces el conjunto $\{\alpha \in \kappa : B \cap \alpha = B_\alpha\}$ es estacionario, que es lo que se quería probar.