EJERCICIOS II
TEORÍA DE CONJUNTOS.

(1) Sean $A \neq \emptyset$ y $n \in \omega$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) Existe $f : n \to A$ que es sobreyectiva.
   (b) Existe $g : A \to n$ que es inyectiva.
   (c) A es finito con a lo más n elementos.

(2) Demuestre que si X y Y son conjuntos finitos, entonces $X \times Y$ es un conjunto finito y $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

(3) Demuestre que si X y Y son conjuntos finitos, entonces $X \cup Y$ es un conjunto finito. Más aún, si además $X \cap Y = \emptyset$, entonces $|X \cap Y| = |X| + |Y|$.

(4) Demuestre que si $|X| = n$, entonces $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

(5) Para cada $n \in \omega$, sea $[X]^n = \{S \subseteq X : |S| = n\}$. Demuestre que $[\omega]^n$ es numerable. (Sugerencia: $[\omega]^n$ es imagen de un conjunto numerable.)

(6) Recordemos que una sucesión $\langle s_n \rangle_{n \in \omega}$ de números naturales es semiconstante si existe $n_0 \in \omega$ tal que $s_n = s_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sucesiones semiconstantes de números naturales. Demuestre que $\mathcal{S}$ es numerable. (Sugerencia: para $s \in S$ sea $f(s) = \prod_{i < n_0} p_i^{s_i}$, donde p_i es el i-ésimo número primo. La función f es inyectiva.)

(7) Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones finitas de números naturales es numerable.

(8) Demuestre que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de números naturales es numerable.

Date: Septiembre 9, 2005.