Tercer Examen Parcial de Cálculo I

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH
Agosto 2015 - Enero 2016

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cuatro problemas. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Demuestre usando la definición oficial (es decir, con sucesiones) que

$$27 = \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}.$$

Solución: Consideremos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $a_n \neq 3$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $a_n \to 3$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\frac{a_n^3 - 27}{a_n - 3} = \frac{(a_n - 3)(a_n^2 + 3a_n + 9)}{a_n - 3} = a_n^2 + 3a_n + 9,$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3 - 27}{a_n - 3} = \lim_{n\to\infty} (a_n^2 + 3a_n + 9) = 27.$$

Puesto que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fue arbitraria podemos concluir que

$$27 = \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3},$$

como era requerido. $\square$

(2) Demuestre que si f es una función real definida cerca de x_0, entonces: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to x_0}(f(x) - L) = 0$.

Solución: Usemos a una función auxiliar $h : Dom(f) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - L$, para cada $x \in Dom(f)$.

Entonces queremos demostrar que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0} h(x) = 0.$$

Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in Dom(f)$ y que $x_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (ambas cosas), además de que $x_n \to x_0$. Entonces $h(x_n) = f(x_n) - L$ y como por nuestro supuesto sabemos que $f(x_n) \to L$, usando los teoremas de operaciones con límites de sucesiones tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) - \lim_{n\to\infty} L = L - L = 0,$$

como se deseaba demostrar.

Recíprocamente supongamos que $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$. Nuevamente considere una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \in Dom(f)$ y que $z_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (ambas cosas), además de que $z_n \to x_0$. Por lo que estamos suponiendo en esta parte sabemos que $h(z_n) \to 0$ y por eso

$$L = \lim_{n\to\infty} h(z_n) + L = \lim_{n\to\infty} (f(z_n) - L) + L = \lim_{n\to\infty} f(z_n).$$

Como la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también fue arbitraria, concluimos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

tal como se quería establecer. $\square$

(3) ¿Es posible que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, que $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$; pero que $\lim_{x\to x_0}(f \cdot g)(x) = L < 0$? Explique su respuesta.

Solución: Sí, claro que lo es; por ejemplo, sean $f(x) = {}^{1}/_{x^2}$ y $g(x) = -5x^2+5x^5$; entonces $(f \cdot g)(x) = -5 + 5x^3$ y basta hacer cuentas sencillas. $\square$

(4) Supóngase que f es una función real que es continua en el intervalo $[1, 10]$, que $f(5) = 5$ y que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in Dom(f)$. Demuestre que para cada $x \in [0, 10]$ se tiene que $f(x) > 0$.

Solución: Si la conclusión del ejercicio no fuera cierta, debería existir $a \in [1, 10]$ tal que $f(a) < 0$. Necesariamente $a < 5$ o bien $a > 5$. Sin perder generalidad supongamos lo primero. La función f también es continua en el intervalo $[a, 5]$ y $f(a) < 0 < f(5)$. Por el Teorema del Valor Intermedio, deberá existir $\xi \in [a, 5]$ tal que $f(\xi) = 0$, lo cual contradice la hipótesis. $\square$