

Ejercicios 2

Cálculo 1

Agosto 2015 — Enero 2016

1. Si A y B son subconjuntos de \mathbb{R} que están acotados superiormente, demuestre que $A \cup B$ y $A \cap B$ están acotados superiormente.
2. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ están acotados superiormente y no son vacíos, demuestre que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

¿Es también cierto que $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$? Demuéstrelo o de un contraejemplo.

3. Demuestre que $A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq [a, b]$.
4. Si A y B están acotados ¿qué se puede decir de $A \setminus B$?
5. “ A es acotado superiormente si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es acotado inferiormente”, ¿es siempre verdadera?
6. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $\sup A = \sup B$ e $\inf A = \inf B$, ¿es cierto que $A = B$?
7. Demuestre que el intervalo $(0, 1)$ no tiene elemento mínimo.
8. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no son vacíos, son acotados superiormente y tal que para cualquier $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x \leq y$, demuestre que $\sup A \leq \sup B$.
9. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no son vacíos, son acotados superiormente, $A \cap B = \emptyset$ y tal que para cualquier $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x < y$. ¿Será cierto que $\sup A < \sup B$?
10. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y acotados superiormente. Sea

$$C = \{c \in \mathbb{R} : (\exists a \in A) (\exists b \in B) (c = a + b)\}.$$

Demuestre que $\sup C = \sup A + \sup B$

11. Demuestre que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son tales que: (i) $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, (ii) $A \cup B = \mathbb{R}$ y (iii) $(\forall x \in A) (y \in B \Rightarrow x < y)$, entonces (a) $A \cap B = \emptyset$ y (b) existe un único $\xi \in \mathbb{R}$ que satisface que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ((x < \xi \Rightarrow x \in A) \ \& \ (x > \xi \Rightarrow x \in B)).$$