8.2 Efectuénse las operaciones siguientes:

a) $\left(\frac{1}{n}\right)(n)$ b) $\frac{(2n^2+n+1)}{(n^2+1)}$ c) $\left(\frac{1}{n+1}\right)+(3n+2)$

8.3 Determínese en los casos siguientes, si (y_k) es una subsucesión de (x_n).

a) $(y_k)=(k^5)$, $(x_n)=(n)$

b) $(y_k)=(k^4)$, $(x_n)=(n^2)$

c) $(y_k)=(k^2)$, $(x_n)=(2n)$

8.4 Determínese cuáles de las sucesiones siguientes son monótonas y si están acotadas superior o inferiormente.

a) $(8n+1)$ b) $\left(\frac{n}{3n+2}\right)$ c) $\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ d) $(\operatorname{sen} n)$ e) $\left(\frac{n}{3^n}\right)$

8.5 Demuéstrese que $n\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ es menor que $\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ para $n\geqslant 1$. [*Sugerencia:* Usese la interpretación geométrica de logaritmo.]

8.6 Pruébese que la sucesión $\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

8.7 Pruébese que una sucesión (x_n) converge a α si, y sólo si, existe un número natural n_0 tal que $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ converge a α.

8.8 Pruébese la proposición 8.20.

8.9 Pruébese que el límite L de cada una de las sucesiones siguientes es el que se indica.

a) $\left(\frac{1}{n^p}\right)$, $p>0$; $L=0$

b) $\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)$; $L=1$

c) $\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)$; $L=1$

d) $(\sqrt{n(n+a)}-n)$; $L=\frac{a}{2}$

e) $((b^n+c^n)^{1/n})$, $b\geqslant c\geqslant 0$; $L=b$

f) $(n|x|^n)$; $L=\begin{cases}0 & \text{si } |x|<1\\ \infty & \text{si } |x|\geqslant 1\end{cases}$

g) $\left(\frac{\log^{\alpha} n}{n^{\beta}}\right)$, $\alpha,\beta>0$; $L=0$

h) $\left(\frac{(e^n)^{\alpha}}{n^{\beta}}\right)$, $\alpha,\beta>0$; $L=\infty$

8.10 Calcúlese el límite, si existe, de cada una de las sucesiones siguientes (puede ser $\pm\infty$):

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n^5+n}{n^5-\frac{n}{3}+1}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^{3/4}}$ f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}}$

g) $\lim_{n\to\infty} (x_n)$ si $(x_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}, \ldots\right)$

h) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3n+5}{n^4}\right)$ i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[5]{n}}$

8.11 A partir de la definición, determínese si las sucesiones siguientes son de Cauchy.

a) $\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)$

b) (x_n) donde $x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$
[*Sugerencia:* Tómese en la condición de Cauchy, $n = 2m$.]

c) $\left(\frac{1}{n^p}\right)$; $p > 0$

8.12 Demuéstrense los teoremas 8.8 y 8.9 y la proposición 8.17.

8.13 Demuéstrese que si (x_n) es una sucesión de números reales no negativos y $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n^{1/n}$, entonces se cumple:

a) $\alpha < 1$ implica que (x_n) converge a cero.

b) $\alpha > 1$ implica que (x_n) diverge a infinito.

c) $\alpha = 1$ no se tiene información.

Este es el llamado *criterio de la raíz* para sucesiones. [*Sugerencia:* Para probar a), demuéstrese que existen $0 < M < 1$ y $0 < N$ tales que $0 \leqslant x_n^{1/n} < M$ si $n \geqslant N$, y aplíquese el Corolario 8.1.]

8.14 Utilizando el ejercicio anterior, determínese la convergencia o divergencia de las sucesiones siguientes:

a) $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$ b) $\left(\frac{n}{c^n}\right)$ (donde $c > 0$) c) $\left(\frac{n^p}{e^n}\right)$ (con $p \geqslant 0$)

8.15 Demuéstrese que una serie de términos no negativos converge o bien diverge a infinito.

8.16 Demuéstrese que:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n^2-1} = \frac{15}{4}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{4\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{4}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 1$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log[(1+1/n)^n(1+n)]}{\log n^n \log(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log 2}\right)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a,\, b)$ $(a,\, b \geq 0)$,

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x^n + y^n}{2}\right)^{1/n} = x$ si $x \geq y > 0$,

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x^{-n} + y^{-n}}{2}\right)^{-\frac{1}{n}} = y$ si $x \geq y > 0$,

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k} a_j^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}} = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ donde $a_j > 0$ para $j = 1, \ldots, k$.

4. Dada la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$

   (a) Demostrar que es creciente y acotada superiormente.

   (b) Hallar su límite.

5. Sea $v_1 = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n}\right)$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sqrt{2}$.

6. Demostrar mediante ejemplos que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la condición $a_n > 0$ para n suficientemente grande, no implica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$.

7. a) Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

   b) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $a \neq 0$ y $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

8. Dar ejemplos de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no convergentes (divergentes) tales que converja:

   a) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, b) $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

   d) $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e) $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

9. Verificar que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ y $a_n \geq b_n$ para n suficientemente grande, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

10. Demuestre que si $p \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \infty$.

11. a) Probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ o si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

    b) Ver que el recíproco no es cierto, es decir, halle una sucesión que converja a 0 pero tal que $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no diverja ni a ∞ ni a $-\infty$.

12. Dar ejemplos de sucesiones no acotadas pero que no diverjan ni a ∞ ni a $-\infty$.

13. Dar ejemplos de sucesiones que diverjan a ∞ pero no sean crecientes.

14. Demostrar:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty.$$

15. Demostrar que:

    i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$.

    ii)

    (a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,

    (b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

    iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.