Tercer Examen Parcial de Cálculo I
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH
Agosto 2013 - Enero 2014

Nombre completo:______________________________________

Correo electrónico:______________________________________

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

1. Supóngase que f y g son funciones definidas en $\mathbb{R}$, que g es continua en 0 y $g(0) = 0$. Si para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $|f(x)| \leq |g(x)|$, demuestre que f es continua en 0.

   Solución: Primero observe que $\lim_{x\to 0} |g(x)| = 0$. En efecto, sabemos que g es continua en 0 y por lo tanto para $\varepsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que si $|x - 0| < \delta$, entonces $|g(x) - 0| < \varepsilon$, que es lo mismo que $|\,|g(x)| - 0| < \varepsilon$.
   Ahora, usando la hipótesis del problema podemos escribir, para cada $x \in \mathbb{R}$
   $$-|g(x)| \leq f(x) \leq |g(x)|.$$
   Tomando límites en cada parte de las desigualdades concluimos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, como se requería.

2. Supóngase que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua en todo el intervalo $[0, 1]$ y que $f(x)$ es siempre irracional para todo $x \in [0, 1]$. ¿Qué se puede decir de f?

   Solución: Se afirma que la función debe ser constante. Si no, debe haber un $b \in (0, 1]$ tal que $f(0) \neq f(b)$. Sin pérdida de generalidad supongamos $f(0) < f(b)$. Ahora la función es continua en el intervalo $[0, b]$; tomando un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(0) < q < f(b)$, podemos usar el Teorema del Valor Intermedio para concluir que hay un $x \in [0, b]$ tal que $f(x) = q$, contradiciondo las condiciones del ejercicio.

3. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Solución: Si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que, por ejemplo, $f(x_0) > 0$, entonces debe haber un intervalo abierto alrededor de x_0 en el cual la función toma sólo valores positivos. Sin embargo, cada intervalo abierto contiene números racionales y para ellos la función toma el valor cero, obteniendo así una contradicción.

4. Supóngase, otra vez, que f y g son funciones reales definidas en todo $\mathbb{R}$ y que $f(a) = g(a)$, además de que la derivada de f por la izquierda de a es igual a la derivada de g por la derecha de a. Defina $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h(x) = f(x)$ para $x \leq a$ y $h(x) = g(x)$ para $x > a$. Demuestre que h es derivable en a.

   Solución: Deseamos investigar el límite
$$\lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}.$$
   Podemos calcular los límites laterales y comprobar que son iguales para establecer que tal límite existe y así la función h es derivable en a. En efecto,
$$\lim_{x\to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x\to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = D_a^+(g);$$
   donde $D_a^+(g)$ denota la derivada de g por la derecha de a. Asimismo,
$$\lim_{x\to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = D_a^-(f);$$
   donde $D_a^-(f)$ denota la derivada de f por la izquierda de a. Como sabemos que $D_a^+(g) = D_a^-(f)$, concluimos que los límites laterales existen y son iguales. Por lo tanto
$$D_a^+(g) = \lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}.$$

5. Encuentre f' en términos de g' para la función
$$f(x) = g(x + g(x)).$$

   Solución: Usando la Regla de la Cadena se puede verificar con facilidad que
$$f'(x) = g'(x + g(x)) \cdot (1 + g'(x)).$$