Segundo Examen Parcial de Cálculo I
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH
Agosto 2013 - Enero 2014

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) ¿Es cierto que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si y sólo si para toda $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $x \in \mathrm{dom}(f)$ se tiene que si $0 < |x-a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - \ell| \leq \delta$? ¿Por qué?

Solución: Sí, sí es cierto. El hecho de que los "nombres" de ε y δ estén intercambiados no tiene la menor importancia; el hecho de que al final se pida $|f(x) - \ell| \leq \delta$; es decir, usar el menor o igual, $\leq$, no es tampoco importante porque se trata una cuantificación universal, podríamos también usar en vez de δ a $\frac{\delta}{2}$ para así tener $|f(x) - \ell| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$. ■

(2) Supóngase que f y g son funciones reales y supóngase que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ siempre que $0 < |x-a| < \delta$. Demuestre que en caso de existir alguno de los límites siguientes, el otro también existe y que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Solución: Supóngase que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Veamos que el otro límite existe y es igual a ℓ; para ello sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existen δ como en la hipótesis del problema y también para el ε dado existe δ_1 de modo tal que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Tomando entonces $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$ tenemos que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - \ell| = |f(x) - \ell| \leq \varepsilon;$$

Esto demuestra que $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

Si se empieza suponiendo que el límite que existe es el otro, el razonamiento es enteramente análogo. ■

(3) Demuestre que en caso de existir alguno de los límites siguientes, el otro también existe y que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h).$$

Solución: Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y que tiene el valor de ℓ; veamos que el otro límite también existe y tiene el mismo valor.

Como siempre, sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in \mathrm{dom}(f)$ se tiene que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Se afirma que el mismo δ es útil para establecer el otro límite. En efecto, supóngase que $a+h \in \mathrm{dom}(f)$ y que $0 < |h| < \delta$; entonces $0 < |(a+h)-a| < \delta$ y consecuentemente $|f(a+h)-\ell| \leq \varepsilon$; como se quería establecer. Por lo tanto, $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell$.

Empecemos ahora suponiendo que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell$ y veamos que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y que tiene el valor de ℓ. Una vez más, sea $\epsilon > 0$. Como $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell$, hay una $\delta > 0$ tal que si $a+h \in \mathrm{dom}(f)$ y $0 < |h| < \delta$, entonces se tiene que $|f(a+h) - \ell| \leq \varepsilon$.

Nuevamente, se afirma que el mismo δ testifica el otro límite. Para mostrar esto, tomemos $x \in \mathrm{dom}(f)$ tal que $0 < |x-a| < \delta$. Observe que que si hacemos $h = x - a$ tenemos entonces que $0 < |h| < \delta$ y que $a+h \in \mathrm{dom}(f)$; por eso tenemos que

$$|f(x) - \ell| = |f(a+h) - \ell| < \varepsilon;$$

es decir, esto establece que $\lim_{x\to a} f(x)$. ■

(4) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{n+10}{2n-1} > \frac{1}{2}$$

y, por medio de la definición, que el límite de la sucesión $(\frac{n+10}{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ es $\frac{5}{10}$.

Solución: Para establecer la desigualdad, tomemos cualquier $n \in \mathbb{N}$. Todos sabemos que $19 > 0$ y consecuentemente

$$2n + 20 > 2n - 1;$$

o bien, $2(n+10) > 2n-1$. Es decir,

$$\frac{n+10}{2n-1} > \frac{1}{2}$$

como se quería establecer. Para establecer que $\frac{1}{2}$ es el límite de la sucesión, considere un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Note que

$$|\frac{n+10}{2n-1} - \frac{1}{2}| = \frac{n+10}{2n-1} - \frac{1}{2} = \frac{19}{4n-2}.$$

Entonces si $n_0 \in \mathbb{N}$ es tal que $n_0 > \frac{19}{4\varepsilon}$ entonces claramente para $n > n_0$ tenemos que $|\frac{n+10}{2n-1} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Esto establece que el límite es 0.5. ■

(5) Calcule los siguientes límites:

(a)

$$\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6},$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}.$$

Solución: Para el primer límite note que

$$\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \frac{(\sqrt{x-2}-2)(\sqrt{x-2}+2)}{(x-6)(\sqrt{x-2}-2)} = \frac{1}{\sqrt{x-2}-2}.$$

Utilizando el ejercicio 2 de este examen se puede concluir que

$$\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{1}{\sqrt{x-2}-2} = \frac{1}{4}.$$

Para el otro límite, observe que

$$\frac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1/x+14}{2+\sqrt[3]{1/x}};$$

por eso

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x+14}{2+\sqrt[3]{1/x}} = 7,$$

usando que $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ y teoremas pertinentes para el cálculo de límites. ■