Examen Final
Cálculo I
(Agosto 2013 - Enero 2014)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

(1) Supóngase que $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ y que B está acotado superiormente. Demuestrese que $\sup A \leq \sup B$.

Solución: Como A y B son subconjuntos no vacíos y ambos acotados superirmente, se sigue que ellos tienen supremo. Además, $\sup B$ es una cota superior de A y como el supremo es la mínima de las cotas superiores, se tiene que debe ocurrir que $\sup A \leq \sup B$.

(2) Demuestre que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a cero y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Solución: Sea $K \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$|a_n \cdot b_n| < |a_n| \cdot K < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Consecuentemente $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

(3) Calcule los siguienes límites:

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

Solución: El límite buscado es equivalente al $\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)$, que vale 12.

(b) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^5}-\sqrt{x^5}}{h}$

Solución: Puede observarse que se trata del cociente diferencial de la función $f(x) = \sqrt{x^5}$, por eso el valor del límite es $\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

(4) Supóngase que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua que es derivable en el intervalo $(0,1)$ y tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Demuestre que existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $f'(x_0) = 2x_0$. (Sugerencia: Use una función auxiliar como $h(x) = f(x) - x^2$.)

Solución: Defínase $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - x^2$. Es fácil observar que h es una función continua en $[0,1]$ y derivable en el intervalo $(0,1)$. Puesto que $h(0) = h(1) = 0$, el Teorema de Rolle asegura la existencia de $x \in (0,1)$ tal que $h'(x) = 0$; pero $h'(x) = f'(x) - 2x$.

(5) Supóngase que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua sin raices en ese intervalo. Considere la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

para $x \in [0,1]$. Demuestre que g es una función contínua.

Solución: Primero observe que si existieran $x_1, x_2 \in (0,1)$ tales que $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, entonces en virtud del Teorema del Valor Intermedio existe z tal que $\min\{x_1, x_2\} < z < \max\{x_1, x_2\}$ y $f(z) = 0$. Por lo tanto, f solamente toma valores positivos o negativos en el intervalo $(0,1)$. Se tiene entonces que g únicamnete toma el valor -1 o el valor 1 en todo el intervalo $(0,1)$; es decir, g es una función constante en dicho intervalo y así g es una función contínua.