$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$\text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0,$$

modo que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

da esta información puede resumirse poniendo:

$$f'(x) = 2|x|.$$

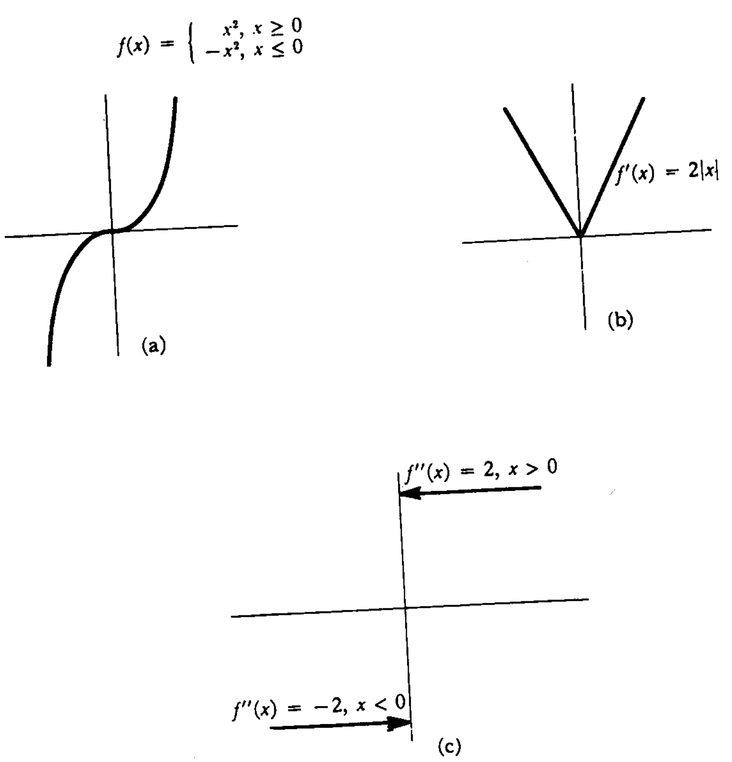

FIGURA 21

Se sigue que $f''(0)$ ¡no existe! La existencia de la segunda derivada es, por lo tanto, una restricción bastante fuerte que se impone a una función. Incluso una función tan «suave» como f revela alguna irregularidad cuando se examina a través de la segunda derivada. Esto sugiere que el comportamiento irregular de la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

podría ser también revelado por la segunda derivada. Sabemos por el momento que $g'(0) = 0$, pero no conocemos $g'(a)$ para ningún $a \neq 0$, de modo que no podemos empezar calculando $g''(0)$. Volveremos sobre esta cuestión al final del próximo capítulo, una vez que hayamos elaborado la técnica para hallar derivadas.

PROBLEMAS

1. (a) Partiendo directamente de la definición, demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$, para $a \neq 0$.
(b) Demostrar que la tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a)$ no corta la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.

2. (a) Demostrar que si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(a) = -2/a^3$ para $a \neq 0$.
(b) Demostrar que la tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a^2)$ corta f en otro punto, que está en el lado opuesto del eje vertical.

3. Demostrar que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = 1/2\sqrt{a}$, para $a > 0$. (La expresión que se obtenga para $[f(a+h) - f(a)]/h$ requerirá algún trabajo algebraico, pero la respuesta debería sugerir el artificio conveniente.)

4. Para todo número natural n sea $S_n(x) = x^n$. Recordando que $S_1'(x) = 1$, $S_2'(x) = 2x$ y $S_3'(x) = 3x^2$, conjeturar una fórmula para $S_n'(x)$. Demostrar la conjetura. (La expresión $(x+h)^n$ puede desarrollarse por el teorema de binomio.)

5. Hallar f' para $f(x) = [x]$.

6. Demostrar lo siguiente, partiendo de la definición (y trazando un dibujo explicativo):
(a) Si $g(x) = f(x) + c$, entonces $g'(x) = f'(x)$;
(b) Si $g(x) = cf(x)$, entonces $g'(x) = cf'(x)$.

7. Supongamos que $f(x) = x^3$.
(a) ¿Cuál es el valor de $f'(9)$, $f'(25)$, $f'(36)$?

(b) ¿Cuál es el valor de $f'(3^2)$, $f'(5^2)$, $f'(6^2)$?
(c) ¿Cuál es el valor de $f'(a^2)$, $f'(x^2)$?
Si el lector no encuentra trivial este problema, es que está olvidando un punto muy importante: $f'(x^2)$ significa la derivada de f en el número que estamos designando por x^2; *no* es la derivada en x de la función $g(x) = f(x^2)$. Para aclararlo del todo:
(d) Para $f(x) = x^3$, comparar $f'(x^2)$ y $g'(x)$ donde $g(x) = f(x^2)$.

8. (a) Supongamos $g(x) = f(x + c)$. Demostrar (partiendo de la definición) que $g'(x) = f'(x + c)$. Trazar un dibujo para ilustrar esto. Para hacer este problema deben escribirse correctamente las definiciones de $g'(x)$ y $f'(x + c)$. El objeto del problema 7 era convencer al lector de que aunque este problema es fácil, no es una absoluta trivialidad y hay algo que demostrar en él: No se pueden añadir simplemente signos prima a la ecuación $g(x) = f(x + a)$. Tratemos de destacar este punto:
(b) Demostrar que si $g(x) = f(cx)$, entonces $g'(x) = c \cdot f'(cx)$. Trátese también de obtener una representación gráfica de por qué esto debe ser así.
(c) Supongamos que f es derivable y periódica con período a (es decir, $f(x + a) = f(x)$ para todo x). Demostrar que f' es también periódica.

9. Hallar $f'(x)$ y también $f'(x + 3)$ en los siguientes casos. Si no se es muy metódico se está expuesto a resbalar en algún punto. Consúltense las soluciones (naturalmente después de hacer el problema).

(i) $f(x) = (x + 3)^5$.
(ii) $f(x + 3) = x^5$.
(iii) $f(x + 3) = (x + 5)^7$.

10. Hallar $f'(x)$ si $f(x) = g(t + x)$ y si $f(t) = g(t + x)$. Las soluciones *no* serán las mismas.

11. (a) Demostrar que Galileo se equivocó: Si un cuerpo cae una distancia $s(t)$ en t segundos, y s' es proporcional a s, entonces s no puede ser una función de la forma $s(t) = ct^2$.
(b) Demostrar que los siguientes hechos acerca de s son verdad si $s(t) = (a/2)t^2$ (el primer hecho hará ver por qué nos hemos pasado de c a $a/2$):
(i) $s''(t) = a$ (la aceleración es constante).
(ii) $[s'(t)]^2 = 2as(t)$.
(c) Si s se mide en pies, el valor de a es 32. ¿De cuántos segundos disponemos para apartarnos de una araña que cae de un techo de 400 pies? ¿Cuál será la velocidad de la araña en el momento de alcanzar a uno que no se haya apartado? ¿Cuál era la posición de la araña en el momento en que su velocidad era la mitad de ésta?

12. Imagine el lector una carretera en la cual estuviese especificado el límite de velocidad en cada uno de sus puntos. Dicho de otro modo, existe cierta función L tal que el límite de velocidad a x millas del origen de la carretera es $L(x)$. Dos automóviles, A y B, van rodando a lo largo de esta carretera; la posición del automóvil A en el tiempo t es $a(t)$ y la del automóvil B es $b(t)$.
(a) ¿Cuál es la ecuación que expresa el hecho de que el automóvil A rueda siempre a la velocidad límite? [La solución *no* es $a'(t) = L(t)$].
(b) Supóngase que A va siempre a la velocidad límite y que la posición de B en el tiempo t es la posición de A en el tiempo $t - 1$. Demostrar que B va siempre también a la velocidad límite.
(c) Supóngase que B va siempre detrás de A a una distancia constante. ¿Bajo qué condiciones irá todavía B siempre a la velocidad límite?

13. Supongamos que $f(a) = g(a)$ y que la derivada por la izquierda de f en a es igual a la derivada por la derecha de g en a. Definir $h(x) = f(x)$ para $x \leq a$ y $h(x) = g(x)$ para $x \geq a$. Demostrar que h es derivable en a.

14. Sea $f(x) = x^2$ si x es racional, y $f(x) = 0$ si x es irracional. Demostrar que f es derivable en 0. [Esta función no debe asustar al lector. Escríbase la definición de $f'(0)$].

***15.** (a) Sea f una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Demostrar que f es derivable en 0. (Quien haya hecho el problema 14 sabrá hacer éste.)
(b) Se puede generalizar este hecho si x^2 se sustituye por $|g(x)|$, donde g tiene ¿qué propiedad?

16. Sea $\alpha > 1$. Si f satisface $|f(x)| \leq |x|^\alpha$, demostrar que f es derivable en 0.

17. Sea $0 < \beta < 1$. Demostrar que si f satisface $|f(x)| \geq |x|^\beta$ y $f(0) = 0$, entonces f no es derivable en 0.

***18.** Sea $f(x) = 0$ para x irracional, y $1/q$ para $x = p/q$, fracción irreducible. Demostrar que f no es derivable en a para ningún a. Indicación: basta demostrar esto para a irracional. ¿Por qué? Si $a = n{,}a_1a_2a_3 \ldots$ es el desarrollo decimal de a, considérese $[f(a + h) - f(h)]/h$ para h racional y también para

$$h = -0{,}00 \ldots 0a_{n+1}a_{n+2} \ldots$$

19. (a) Supóngase que $f(a) = g(a) = h(a)$, que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x, y que $f'(a) = h'(a)$. Demostrar que g es derivable en a y que $f'(a) = g'(a) = h'(a)$. [Empezar con la definición de $g'(a)$.]
(b) Demostrar que la conclusión no se sigue si omitimos la hipótesis $f(a) = g(a) = h(a)$.

20. Sea f una función polinómica cualquiera; veremos en el capítulo próximo que f es derivable. La tangente a f en $(a, f(a))$ es la gráfica de $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$. Así, pues, $f(x) - g(x)$ es la función polinómica $d(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$. Hemos visto ya que si $f(x) = x^2$, entonces $d(x) = (x - a)^2$, y si $f(x) = x^3$, entonces $dx = (x - a)^2(x + 2a)$.

(a) Hallar $d(x)$ cuando $f(x) = x^4$, y demostrar que es divisible por $(x - a)^2$.

(b) Parece haber ciertamente alguna evidencia de que $d(x)$ es siempre divisible por $(x - a)^2$. La figura 22 ofrece un argumento intuitivo: Por lo

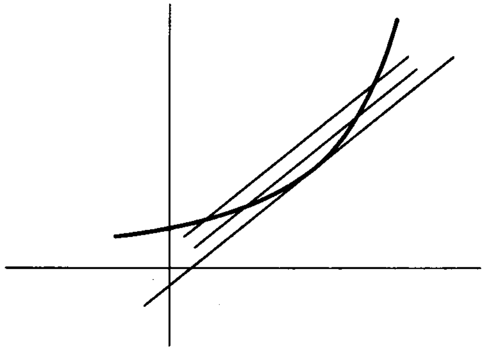

FIGURA 22

general las rectas paralelas a la tangente cortan a la gráfica en dos puntos; la tangente corta la gráfica sólo una vez cerca del punto, de modo que la intersección debería ser una «intersección doble». Para dar una demostración rigurosa, obsérvese primero que

$$\frac{d(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Contestar ahora las siguientes cuestiones. ¿Por qué es $f(x) - f(a)$ divisible por $(x - a)$? ¿Por qué existe una función polinómica h tal que $h(x) = d(x)/(x - a)$ para $x \neq a$? ¿Por qué es $\lim_{x \to a} h(x) = 0$? ¿Por qué es $h(a) = 0$? ¿Por qué esto resuelve el problema?

21. (a) Demostrar que $f'(a) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)]/(x - a)$. (No hay aquí nada de profundo.)

(b) Demostrar que las derivadas constituyen una «propiedad local»: Si $f(x) = g(x)$ para todo x de algún intervalo abierto que contiene a, entonces

$f'(a) = g'(a)$. [Esto significa que al calcular $f'(a)$, se puede prescindir de $f(x)$ para cualquier $x \neq a$ particular. Por supuesto, no se puede prescindir de $f(x)$ para todos los x a la vez.]

***22.** (a) Supongamos que f es derivable en x. Demostrar que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}.$$

Indicación: Recordar un viejo truco algebraico: un número no se altera cuando se le suma y resta a la vez una misma cantidad.

**(b) De un modo más general demostrar que

$$f'(x) = \lim_{h,k \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x - k)}{h + k}.$$

***23.** Demostrar que si f es par, entonces $f'(x) = -f'(-x)$. [Para evitar confusión, sea $g(x) = f(-x)$; hallar $g'(x)$ y *entonces* recordar qué otra cosa es g.] Trácese un dibujo.

***24.** Demostrar que si f es impar, entonces $f'(x) = f'(-x)$. Una vez más, trácese un dibujo.

25. Los problemas 23 y 24 dicen que f' es par si f es impar, e impar si f es par. ¿Qué puede decirse, por lo tanto, acerca de $f^{(k)}$?

26. Hallar $f''(x)$ si

(i) $f(x) = x^3$.
(ii) $f(x) = x^5$.
(iii) $f'(x) = x^4$.
(iv) $f(x + 3) = x^5$.

27. Si $S_n(x) = x^n$, y $0 \leq k \leq n$, demostrar que

$$S_n{}^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n - k)!} x^{n-k} = k! \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

***28.** (a) Hallar $f'(x)$ si $f(x) = |x|^3$. Hallar $f''(x)$. ¿Existe $f'''(x)$ para todo x?