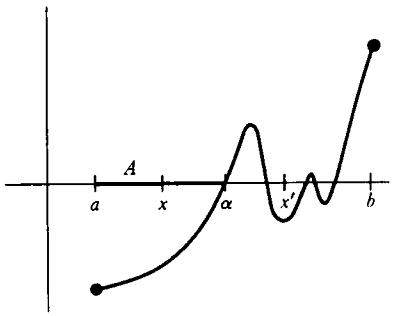

FIGURA 11

sa. Al ser f negativa en a y positiva en b, el conjunto A contiene algunos puntos mayores que a, mientras que todos los puntos suficientemente próximos a b no pertenecen a A. (Estamos aplicando aquí la continuidad de f en $[a, b]$ así como el problema 6-15.)

Supongamos ahora que α es el número más pequeño que es mayor que todos los miembros de A; evidentemente $a < \alpha < b$. Decimos que $f(\alpha) = 0$, y para demostrarlo nos basta con eliminar las posibilidades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$.

Supongamos primero que $f(\alpha) < 0$. Entonces, según el teorema 6-3, $f(x)$ sería menor que 0 para todo x de un intervalo pequeño conteniendo α, en particular para algunos números mayores que α (figura 12); pero esto contradice el hecho de que α es mayor que cualquier miembro de A, puesto que los números mayores estarían también en A. En consecuencia, $f(\alpha) < 0$ es falso.

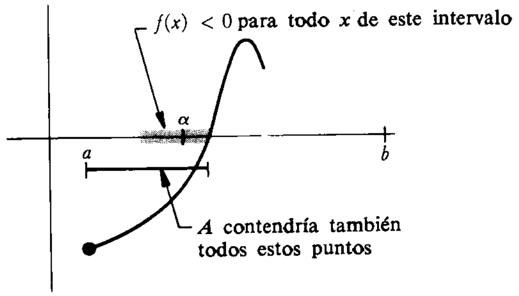

FIGURA 12

Por otra parte, supongamos $f(\alpha) > 0$. Aplicando de nuevo el teorema 6-3 vemos que $f(x)$ sería positivo para todo x de un intervalo pequeño conteniendo α,

en particular para algunos números menores que α (figura 13). Esto significa que estos números más pequeños están todos *fuera* de A. En consecuencia, se podría haber elegido un α todavía más pequeño que sería mayor que todos los miembros de A. Otra vez tenemos una contradicción; $f(\alpha) > 0$ es también falso. Por lo tanto, $f(\alpha) = 0$ y nos tienta decir c. q. d.

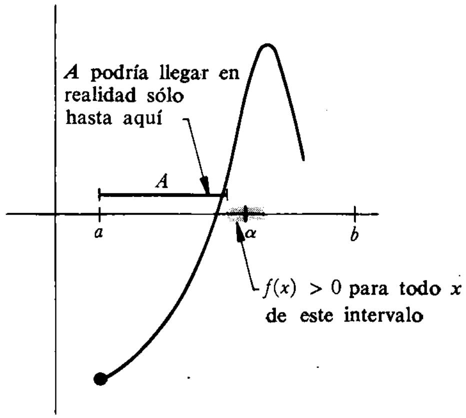

FIGURA 13

Sabemos, sin embargo, que algo debe estar equivocado, puesto que no se ha aplicado ninguna propiedad nueva de **R**, y no hace falta cavilar mucho para encontrar el punto dudoso. Está claro que podemos elegir un número α mayor que todos los miembros de A (por ejemplo, podemos elegir $\alpha = b$), pero no está tan claro que podamos elegir uno ***más pequeño que todos***. En efecto, supongamos que A consiste en todos los números $x \geq 0$ tales que $x^2 < 2$. Si el número $\sqrt{2}$ no existiera, entonces no existiría un número mínimo mayor que todos los miembros de A; cualquiera que fuera el $y > \sqrt{2}$ que eligiéramos, siempre podríamos elegir uno más pequeño.

Una vez descubierto el sofisma, aparece casi evidente cuál es la propiedad adicional de los números reales que necesitamos. Ahora todo se reduce a explicarla debidamente y aplicarla. Éste es el objetivo del próximo capítulo.

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles están acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo. (Obsérvese que f ***puede*** tener estas propiedades aun no siendo continua, y aunque el intervalo no sea cerrado.)

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.
(ii) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.
(iii) $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$.
(iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$.
(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x > a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$. (Será necesario considerar distintos valores posibles para a.)
(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $[-a-1, a+1]$.
(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.
(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.
(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ -1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.
(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ en $[0, a]$.
(xi) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{1 + a^2})$ en $[0, a^3]$.
(xii) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.

2. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.
(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.
(iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

3. Demostrar que existe algún número x tal que

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$.
(ii) $\operatorname{sen} x = x - 1$.

4. Este problema es una continuación del problema 3-7.
(a) Si $n - k$ es par, y ≥ 0, hallar una función polinómica de grado n que tenga exactamente k raíces.
(b) Una raíz a de la función polinómica f se dice que tiene **multiplicidad** m si $f(x) = (x - a)^m g(x)$, donde g es una función polinómica que *no* tiene la raíz a. Sea f una función polinómica de grado n. Supóngase que f tiene k raíces, contando las multiplicidades, es decir, supóngase que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demostrar que $n - k$ es par.

5. Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

6. Supóngase que f es una función *continua* en $[-1, 1]$ y tal que $x^2 + (f(x))^2 = 1$ para todo x. [Esto significa que $(x, f(x))$ está siempre sobre el círculo unidad.] Demostrar que o bien es $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para todo x, o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ para todo x.

7. ¿Cuántas funciones continuas f existen satisfaciendo $(f(x))^2 = x^2$ para todo x?

8. Supóngase que f y g son continuas, que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demostrar que o bien $f(x) = g(x)$ para todo x o bien $f(x) = -g(x)$ para todo x.

9. (a) Supóngase que f es continua, que $f(x) = 0$ solamente para $x = a$, y que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ así como para algún $x < a$. ¿Qué puede decirse acerca de $f(x)$ para todo $x \neq a$?
(b) Supongamos ahora que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ y que $f(x) < 0$ para algún $x < a$. ¿Qué puede decirse acerca de $f(x)$ para $x \neq a$?
*(c) Del mismo modo, discutir el signo de $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ cuando x e y no son ambos 0.

10. Supóngase que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en $[a, b]$. (Si la demostración no es muy corta es que no está bien.)

11. Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x (dibujarlo). Demostrar que $f(x) = x$ para algún número x.

12. (a) El problema 11 demuestra que f corta a la diagonal del cuadrado en la figura 14 (línea continua). Demostrar que f debe también cortar la otra diagonal (de trazos).
(b) Demostrar el siguiente hecho más general: Si g es continua en $[0, 1]$ y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ ó $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x.

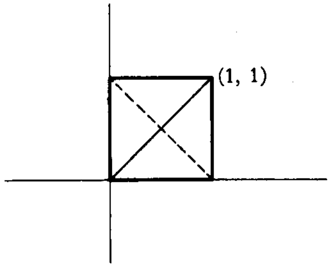

FIGURA 14

13. (a) Sea $f(x) = \text{sen } 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. ¿Es f continua en $[-1, 1]$? Demostrar que f satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en $[-1, 1]$; dicho de otro modo, si f toma dos valores comprendidos en $[-1, 1]$, toma también todos los valores intermedios.

*(b) Supóngase que f satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios, y que f toma *sólo una vez* cada uno de los valores. Demostrar que f es continua.

*(c) Generalizar al caso en que f toma cada uno de los valores solamente un número finito de veces.

14. Si f es una función continua en $[0, 1]$, sea $\|f\|$ el valor máximo de $|f|$ en $[0, 1]$.

(a) Demostrar que, cualquiera que sea el número c, se cumple $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

*(b) Demostrar que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dar un ejemplo en el que $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

(c) Demostrar que $\|h - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\|$.

***15.** Supongamos que ϕ es continua y $\lim\limits_{x \to \infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \phi(x)/x^n$.

(a) Demostrar que si n es impar, entonces existe un número x tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

(b) Demostrar que si n es par, entonces existe un número y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$ para todo x.

Indicación: ¿Qué demostraciones se trata de comprobar que el lector ha comprendido en este problema?

***16.** Sea f una función polinómica cualquiera. Demostrar que existe algún número y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ para todo x.

***17.** Supóngase que f es una función continua con $f(x) > 0$ para todo x, y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (Dibujarlo.) Demostrar que existe algún número y tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x.

***18.** (a) Supóngase que f es continua en $[a, b]$, y sea x un número cualquiera. Demostrar que existe un punto en la gráfica de f que es, entre todos, el más próximo a $(x, 0)$; en otras palabras, existe algún y en $[a, b]$ tal que la distancia desde $(x, 0)$ a $(y, f(y))$ es $\leq$ distancia de $(x, 0)$ a $(z, f(z))$ para todo z de $[a, b]$. (Véase la figura 15.)

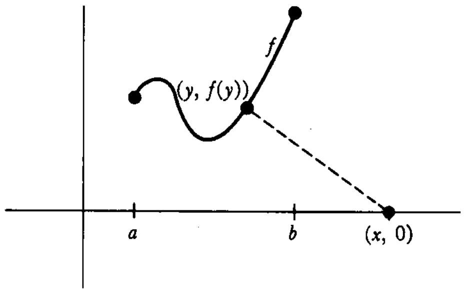

FIGURA 15

(b) Demostrar que esta misma afirmación no es necesariamente cierta si $[a, b]$ se sustituye por (a, b).

(c) Demostrar que la afirmación se cumple si $[a, b]$ se sustituye por $\mathbf{R}$.

(d) En los casos (a) y (c), sea $g(x)$ la mínima distancia de $(x, 0)$ a un punto de la gráfica de f. Demostrar que $g(y) \leq g(x) + |x - y|$, y deducir que g es continua.

(e) Demostrar que existen números x_0 y x_1 en $[a, b]$ tales que la distancia de $(x_0, 0)$ a $(x_1, f(x_1))$ es $\leq$ la distancia de $(x_0', 0)$ a $(x_1', f(x_1'))$, cualesquiera que sean x_0', x_1' en $[a, b]$.

****19.** (a) Supóngase que f es continua en $[0, 1]$ y $f(0) = f(1)$. Sea n un número natural cualquiera. Demostrar que existe algún número x tal que $f(x) = f(x + 1/n)$, como se indica en la figura 16 para $n = 4$. Indicación: Considérese la función $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$; ¿qué ocurriría si $g(x) \neq 0$ para todo x?

(b) Supóngase que $0 < a < 1$ pero que a es distinto de $1/n$ cualquiera que sea el número natural n. Hallar una función f que sea continua en $[0, 1]$ y que satisfaga $f(0) = f(1)$, pero que no satisfaga $f(x) = f(x + a)$ para ningún x.

****20.** (a) Demostrar que no existe ninguna función continua f definida en $\mathbf{R}$ que tome exactamente dos veces cada uno de los valores. Indicación: Si