DEMOSTRACIÓN

Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que f que es continua en a, si $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el ε. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a),$$

y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.

Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\varepsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$. ▌

PROBLEMAS

1. ¿Para cuáles de las siguientes funciones f existe una función F de dominio $\mathbf{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f?

   (i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

   (ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

   (iii) $f(x) = 0$, x irracional.

   (iv) $f(x) = 1/q$, $x = p/q$ racional en fracción irreducible.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?
3. (a) Supóngase que f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo x. Demostrar que f es continua en 0. [Obsérvese que $f(0)$ debe ser igual a 0.]
   (b) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$.
   (c) Supóngase que g es continua en 0, $g(0) = 0$, y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en 0.
4. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.
5. Para todo número a, hallar la función que sea continua en a, pero no lo sea en ningún otro punto.

6. (a) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.
   (b) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, y en 0, pero que sea continua en todos los demás puntos.
7. Supóngase que f satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$, y que f es continua en 0. Demostrar que f es continua en a para todo a.
8. Supóngase que f es continua en a y $f(a) = 0$. Demostrar que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a.
9. (a) Supóngase que f *no* es continua en a. Demostrar que para algún $\varepsilon > 0$ existen números x tan próximos como se quiera de a con $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Ilústrese esto gráficamente.
   (b) Dedúzcase que para algún $\varepsilon > 0$, *o bien* existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) < f(a) - \varepsilon$ o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) > f(a) + \varepsilon$.
10. (a) Demostrar que si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.
    (b) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = E + O$, donde E es par y continua y O es impar y continua.
    (c) Demostrar que si f y g son continuas, también lo son $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$.
    (d) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son no negativas y continuas.
11. Demostrar el teorema 1(3) aplicando el teorema 2 y la continuidad de la función $f(x) = 1/x$.

*12. (a) Demostrar que si f es continua en l y $\lim_{x\to a} g(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(l)$. [Se puede hacer partiendo de las definiciones, pero es más fácil considerar la función G con $G(x) = g(x)$ para $x \neq a$, y $G(a) = l$.]
   (b) Demostrar que si no se supone la continuidad de f en l, entonces no se cumple, por lo general, que $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$. Indicación: Hacer la prueba con $f(x) = 0$ para $x \neq l$, y $f(l) = 1$.

13. (a) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g que es continua en $\mathbf{R}$, y que satisface $g(x) = f(x)$ para todo x en $[a, b]$. Indicación: Puesto que hay evidentemente un gran margen para elegir, hágase la prueba con g constante en $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$.
    (b) Hágase ver con un ejemplo que esta afirmación es falsa si se sustituye $[a, b]$ por (a, b).
14. (a) Supóngase que g y h son continuas en a, y que $g(a) = h(a)$. Defínase $f(x)$ como $g(x)$ si $x \geq a$ y $h(x)$ si $x \leq a$. Demostrar que f es continua en a.
    (b) Supóngase que g es continua en $[a, b]$, h es continua en $[b, c]$ y $g(b) = h(b)$.

Sea $f(x)$ igual a $g(x)$ para x en $[a, b]$ e igual a $h(x)$ para x en $[b, c]$. Demostrar que f es continua en $[a, c]$. (Así, pues, las funciones continuas pueden «soldarse».)

15. (a) Demostrar la siguiente versión del teorema 3 **para** «continuidad por la derecha»: Supóngase que $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, y $f(a) > 0$. Existe entonces un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$.

(b) Demostrar una versión del teorema 3 cuando $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

16. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, pero es $\neq f(a)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad evitable** en a.

(a) Si $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, ¿tiene f una discontinuidad evitable en 0? ¿Y si $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$?

(b) Supóngase que f tiene una discontinuidad evitable en a. Sea $g(x) = f(x)$ para $x \neq a$ y sea $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Demostrar que g es continua en a. (No tomarse demasiado trabajo; esto es muy fácil.)

(c) Sea $f(x) = 0$ si x es racional, y sea $f(p/q) = 1/q$ si p/q es una fracción irreducible. ¿Qué función es la g definida por $g(x) = \lim_{y \to x} f(y)$?

*(d) Sea f una función con la propiedad de que todo punto de discontinuidad es una discontinuidad evitable. Esto significa que $\lim_{y \to x} f(y)$ existe para todo x, pero que f puede ser discontinua en algunos (incluso en infinitos) números x. Defínase $g(x) = \lim_{y \to x} f(y)$. Demostrar que g es continua. [Esto no es tan fácil como la parte (b).]

**(e) ¿Existe alguna función f que sea discontinua en todo punto y que tenga solamente discontinuidades evitables? (Vale la pena considerar este problema ahora, pero principalmente como una prueba de intuición; aunque sospeche la solución correcta, el lector no podrá ciertamente demostrarla por ahora. Véase el problema 21-33.)