PROBLEMAS

1. Como ejercicio de entrenamiento, hallar $f'(x)$ para cada una de las f siguientes. [No preocuparse por el dominio de f o f'; obténgase sólo la fórmula para $f'(x)$ que da la solución correcta cuando tiene sentido.]

(i) $f(x) = \operatorname{sen}(x + x^2)$.
(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x^2$.
(iii) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$.
(iv) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.
(v) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.
(vi) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$.
(vii) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$.
(viii) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))$.

2. Hallar $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones f. (Al autor le costó veinte minutos calcular las derivadas para la sección de soluciones, y al lector no le debería costar mucho más. Aunque el calcular rápidamente no constituye el objetivo de las matemáticas, si se quiere tratar con aplomo las aplicaciones teóricas de la regla de la cadena, estas aplicaciones concretas deberían ser un juego de niños; a muchos matemáticos les gusta decir que no saben sumar, pero casi todos ellos saben cuando tienen que hacerlo.)

(i) $f(x) = \operatorname{sen}((x + 1)^2(x + 2))$.
(ii) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + \operatorname{sen} x)$.
(iii) $f(x) = \operatorname{sen}^2((x + \operatorname{sen} x)^2)$.
(iv) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.
(v) $f(x) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)$.
(vi) $f(x) = (\cos x)^{31^2}$.
(vii) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x^2$.
(viii) $f(x) = \operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))$.
(ix) $f(x) = (x + \operatorname{sen}^5 x)^6$.
(x) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))$.
(xi) $f(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7)$.

(xii) $f(x) = (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$.
(xiii) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen} x^2))$.
(xiv) $f(x) = \operatorname{sen}(6 \cos(6 \operatorname{sen}(6 \cos 6x)))$.
(xv) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$.
(xvi) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}}$.
(xvii) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$.
(xviii) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right)$.

3. Hallar las derivadas de las funciones **tg**, **ctg**, sec y cosec. (No hace falta aprenderse de memoria estas fórmulas, aunque se necesitarán de vez en cuando; si se expresan debidamente las soluciones, resultarán sencillas y algo simétricas.)

4. Para cada una de las siguientes funciones f, hallar $f'(f(x))$ [*no* $(f \circ f)(x)$].

(i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$.
(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x$.
(iii) $f(x) = x^2$.
(iv) $f(x) = 17$.

5. Para cada una de las siguientes funciones f, hallar $f(f'(x))$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
(ii) $f(x) = x^2$.
(iii) $f(x) = 17$.
(iv) $f(x) = 17x$.

6. Hallar f' en función de g' si

(i) $f(x) = g(x + g(a))$.
(ii) $f(x) = g(x \cdot g(a))$.
(iii) $f(x) = g(x + g(x))$.
(iv) $f(x) = g(x)(x - a)$.
(v) $f(x) = g(a)(x - a)$.
(vi) $f(x + 3) = g(x^2)$.

7. (a) Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera no especificada, pero se sabe que cuando el radio es 6, la tasa de variación del mismo es 4. Hallar la tasa de variación del área cuando el radio es 6. [Si $r(t)$ y $A(t)$ representan el radio y el área en el tiempo t, entonces las funciones r y A satisfacen $A = \pi r^2$; lo indicado es una aplicación directa de la regla de la cadena.]
(b) Supongamos que se nos dice que el objeto circular que hemos estado observando es en realidad la sección transversal de un objeto esférico. Hallar la tasa de variación del *volumen* cuando el radio es 6. (Ciertamente hará falta disponer de una fórmula para el volumen de la esfera; en caso de que el lector la haya olvidado, el volumen es $\frac{4}{3}\pi$ veces el cubo del radio.)
(c) Supongamos ahora que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5 cuando el radio es 3. Hallar la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3. Este problema se debe poder resolver de dos maneras: primero usando las fórmulas para el área y el volumen en función del radio; y después expresando el volumen en función del área (para utilizar este método hará falta el problema 9-3).

8. El área de una corona circular de radios interior y exterior variables se mantiene constante e igual a 9π cm^2. El área del círculo exterior varía a razón de 10π cm^2/s. ¿A qué velocidad varía la circunferencia del círculo interior cuando el área de éste es 16π cm^2?

9. Una partícula A se desplaza a lo largo del eje horizontal positivo, mientras otra partícula B lo hace a lo largo de la gráfica de $f(x) = -\sqrt{3}\,x$, $x \leq 0$. En un cierto instante, A se halla en el punto (5, 0) desplazándose a una velocidad de 3 unidades/s; y en este mismo instante, B se halla a una distancia de 3 unidades del origen con una velocidad de desplazamiento de 4 unidades/s. ¿A qué velocidad varía la distancia de A a B?

10. Sea $f(x) = x^2$ sen $1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Supongamos también que h y k son dos funciones tales que

$$h'(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(x+1)) \qquad k'(x) = f(x+1)$$
$$h(0) = 3 \qquad k(0) = 0.$$

Hallar

(i) $(f \circ h)'(0)$.
(ii) $(k \circ f)'(0)$.
(iii) $\alpha'(x^2)$, donde $\alpha(x) = h(x^2)$. Póngase mucho cuidado.

11. Hallar $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

12. Por medio de la derivada de $f(x) = 1/x$, tal como se ha hallado en el problema 9-1, hallar $(1/g)'(x)$ por medio de la regla de la cadena.

13. (a) Aplicando el problema 9-3 hallar $f'(x)$ para $-1 < x < 1$, si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
(b) Demostrar que la tangente a la gráfica de f en $(a, \sqrt{1-a^2})$ corta a la gráfica solamente en este punto (y hacer ver así que la definición geométrica elemental de tangente coincide con la nuestra).

14. Demostrar análogamente que las tangentes a la elipse y a la hipérbola cortan estos conjuntos solamente una vez.

15. Si $f + g$ es derivable en a, ¿son f y g necesariamente derivables en a? Si $f \cdot g$ y f son derivables en a, ¿qué condiciones para f implican que g sea derivable en a?

16. (a) Demostrar que si f es derivable en a, entonces $|f|$ es también derivable en a, siempre que $f(a) \neq 0$.
(b) Dar un contraejemplo si $f(a) = 0$.
(c) Demostrar que si f y g son derivables en a, entonces las funciones $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son derivables en a, siempre que $f(a) \neq g(a)$.
(d) Dar un contraejemplo si $f(a) = g(a)$.

17. Si f es tres veces derivable y $f'(x) \neq 0$, la *derivada de Schwarz* de f en x se define como

$$\mathfrak{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

(a) Demostrar que

$$\mathfrak{D}(f \circ g) = [\mathfrak{D}f \circ g] \cdot g'^2 + \mathfrak{D}g.$$

(b) Demostrar que si $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, con $ad - bc \neq 0$, entonces $\mathfrak{D}f = 0$. En consecuencia, $\mathfrak{D}(f \circ g) = \mathfrak{D}g$.

18. Supongamos que $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}$ existen. Demostrar la ***fórmula de Leibniz:***

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a).$$

***19.** Demostrar que si $f^{(n)}(g(a))$ y $g^{(n)}(a)$ existen ambas, entonces existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Un poco de experimentación debería convencer al lector que no es adecuado buscar una fórmula para $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Para demostrar que existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$ hará falta encontrar una proposición razonable acerca de $(f \circ g)^{(n)}(a)$ que pueda ser demostrada por inducción. Inténtese con algo tal como: «$(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe y es suma de términos cada uno de los cuales es un producto de términos de la forma...»

20. (a) Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, hallar una función g tal que $g' = f$. Hállese otra.

(b) Si

$$f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots + \frac{b_m}{x^m},$$

hallar una función g con $g' = f$.

(c) ¿Existe una función

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}$$

tal que $f'(x) = 1/x$?

21. Demostrar que existe una función polinómica f de grado n tal que

(a) $f'(x) = 0$ para precisamente $n - 1$ números x.

(b) $f'(x) = 0$ para ningún x, si n es impar.

(c) $f'(x) = 0$ para exactamente un x, si n es par.

(d) $f'(x) = 0$ para exactamente k números x, si $n - k$ es impar.

22. (a) El número a recibe el nombre de **raíz doble** de la función polinómica f si $f(x) = (x - a)^2 g(x)$ para alguna función polinómica g. Demostrar que a es raíz doble de f si y sólo si a es raíz de f y de f' a la vez.

(b) ¿Cuándo tiene $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ una raíz doble? ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta condición?

23. Si f es derivable en a, sea $d(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$. Hallar $d'(a)$. En conexión con el problema 22, esto nos da otra solución para el problema 9-20.

***24.** Este problema es parecido al problema 3-6. Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ números dados.

(a) Si $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, demostrar que existe una función polinómica f de grado $2n - 1$, tal que $f(x_j) = f'(x_j) = 0$ para $j \neq i$, y $f(x_i) = a_i$, $f'(x_i) = b_i$. Indicación: Recordar el problema 22.

(b) Demostrar que existe una función polinómica f de grado $2n - 1$ con $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$ para todo i.

***25.** Supongamos que a y b son dos raíces consecutivas de una función polinómica f, pero que a y b no son raíces dobles, de modo que podemos escribir $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$.

(a) Demostrar que $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo. (Recordar que a y b son raíces consecutivas.)

(b) Demostrar que existe algún número x con $a < x < b$ y $f'(x) = 0$. (Trácese también un dibujo para ilustrar este hecho.) Indicación: Compárese el signo de $f'(a)$ y $f'(b)$.

(c) Demostrar ahora el mismo hecho, aun cuando a y b sean raíces múltiples. Indicación: Si $f(a) = (x - a)^m (x - b)^n g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$, considerar la función polinómica $h(x) = f'(x)/(x - a)^{m-1}(x - b)^{n-1}$.

Este teorema fue demostrado por el matemático francés Rolle, en conexión con el problema de aproximar raíces de polinomios, pero el resultado no fue formulado originariamente en términos de derivadas. De hecho, Rolle fue uno de los matemáticos que nunca aceptaron las nuevas ideas del cálculo infinitesimal. No debe juzgarse demasiado terca su actitud, considerando que por un espacio de 100 años nadie fue capaz de definir los límites a no ser en términos que lindaban con la **mística**, pero en general la historia ha sido particularmente benévola con Rolle; su nombre ha sido vinculado a un resultado mucho más general que aparecerá en el próximo capítulo y que constituye la base de los resultados teóricos más importantes del cálculo infini-