Tercer Examen Parcial de Cálculo I

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Febrero - Junio, 2010

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$

Solución: Para el primer límite se puede proceder así:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Para el segundo límite hagamos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x+1)} = \frac{4}{3}.$$

■

(2) Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to 0} f(x+a) = L$. Es decir, si alguno de los límites existe, el otro límite también existe y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+a).$$

Solución: $\Rightarrow$] Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Veamos que $\lim_{x\to 0} f(x+a) = L$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera que tenga términos diferentes de 0 y de modo que $x_n + a \in dom(f)$, además de que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Por los bien conocidos teoremas sobre límites de sucesiones sabemos que $\lim_{n\to\infty} x_n + a = a$. Como estamos suponiendo que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} f(x_n + a) = L$, pero este límite es el que se quería establecer.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\lim_{x\to 0} f(x+a) = L$. Veamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera que tenga términos diferentes de a y de modo que $y_n \in dom(f)$, además de que $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Nuevamente, por los bien conocidos teoremas sobre límites de sucesiones sabemos que $\lim_{n\to\infty} y_n - a = 0$. Como ahora estamos suponiendo que $\lim_{y\to 0} f(y+a) = L$, se sigue que $L = \lim_{n\to\infty} f(y_n - a + a) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, y mágicamente este límite es el que se quería establecer. ■

(3) Demuestre que si f y g son funciones definidas en $\mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$, que si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y si existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \notin (-\infty, \delta)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que entonces $\lim_{x\to a} f(x) g(x) = +\infty$.

Solución: Sea $k \in \mathbb{R}$, que sin pérdida de generalidad lo podemos suponer positivo. Como $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, debe existir $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$x > r \Rightarrow f(x) > \frac{k}{\delta}.$$

Entonces para $x > r$ se tiene que

$$f(x) \cdot g(x) > \frac{k}{\delta} \cdot \delta = k.$$

Esto establece que $\lim_{x\to a} f(x) g(x) = +\infty$.

(4) ¿Es posible que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y que $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = L < 0$? Explique su respuesta.

Solución: Pongamos $f(x) = x^{-2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y sea $g(x) = -x^2$ también para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} (f \cdot g)(x) = -1 < 0.$$

Por lo tanto, sí es posible. ■

(5) Supóngase que f y g son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Demostrar que si para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) \neq g(x)$ y además $f(0) > g(0)$, entonces se tiene que $f(x) > g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Supóngase que para algún $x_1 \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x_1) < g(x_1)$. Colaramente $x_1 < 0$ o en su defecto $x_1 > 0$; sin pérdida de generalidad supongamos la primera opción. Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) - g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Nótese que $h(x_1) < 0 < h(0)$ y que la función h es continua en el intervalo $[x_1, 0]$. Así el Teorema del Valor Intermedio nos dice que debe existir $c \in (x_1, 0)$ tal que $h(c) = 0$; es decir, $f(c) = g(c)$, contradiciendo la hipótesis. ■

(6) Demuestre que la ecuación $x^5 - 3x = 1$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$ y que en $\mathbb{R}$ al menos tiene tres soluciones.

Solución: Basta poner $f(x) = x^5 - 3x - 1$. Entonces f es una función continua sobre todo $\mathbb{R}$. Además observe que $f(-2) < 0$, $f(-1) > 0$, $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$.

Entonces en cada uno de los intervalos: $[-2,-1]$, $[-1,1]$ y $[1,2]$ la función cambia de signo. Aplicando el Teorema del Valor Intermedio se concluye que en cada uno de esos tres intervalos f debe tener una raíz. Esto es lo que se pedía establecer. $\blacksquare$