Segundo Examen Parcial de Cálculo I
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH
Febrero - Junio, 2010

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $b_n = \sqrt[3]{\frac{n^2+1}{n}}$. Determine si la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente o decreciente y demuestre su afirmación.

Solución: La sucesión es estríctamente creciente; en efecto:

$$\sqrt[3]{\frac{(n+1)^2+1}{n+1}} > \sqrt[3]{\frac{n^2+1}{n}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{(n+1)^2+1}{n+1} > \frac{n^2+1}{n}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$n^3+2n^2+2n > n^3+n^2+n+1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$n^2+n > 1.$$

Lo cual establece que $b_{n+1} > b_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, que por resultados establecidos en clase nos da el resultado. ■

(2) Determine el límite, si existe, de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{3}}\right),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución: No es posible sólo aplicar teoremas para la aritmética de límites de sucesiones. Así entonces debemos transformar un poco la sucesión para determinar su límite, si existe. Obsérvese que:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{3}}\right) &= \frac{(n+1-n)\sqrt{n+\frac{1}{3}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{n+\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{3n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}.\end{aligned}$$

Ahora es posible aplicar teoremas para la aritmética de límites y constatar que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{3}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{3n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

■

(3) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un par de sucesiones de números reales. Supóngase que $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ y que existe $\delta > 0$ tal que para n suficientemente grande se tiene que $a_n < -\delta$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty.$$

Solución: Emplearemos la definición para establecer el resultado. Sea $k \in \mathbb{R}$ que sin pérdida de generalidad lo podemos suponer $k < 0$. Como sabemos que $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_n > \frac{-k}{\delta}$$

para $n \geq n_0$. También sin pérdida de generalidad puede suponerse que $a_n < -\delta$, para cada $n \geq N_0$. Entonces para $n \geq n_0$ se tiene que

$$-a_n b_n > -k\frac{-a_n}{\delta} > -k.$$

La última desigualdad se debe a que $\frac{-a_n}{\delta} > 1$. Hemos establecido así que $a_n b_n < k$ para todo $n \geq n_0$, lo cual se quería demostrar. ■

(4) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un par de sucesiones de números reales de manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}.$$

Supóngase que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, demuestre que también lo es $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y que, de hecho, tienen el mismo límite.

Solución: Comencemos por observar que

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} = 0.$$

En efecto, $\frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ y tomando límites a las sucesiones de estas desigualdades conseguimos (*). Ahora supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ y denotremos por s_n a la sucesión $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$. De la hipótesis se sigue que

$$a_n - s_n \leq b_n \leq a_n + s_n.$$

Nuevamente tomando límites en la desigualdad anterior teniendo en cuenta que en los extremos se encuentran sucesiones convergentes se tiene que

$$\ell \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \ell,$$

como se quería establecer. ■

(5) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = p \cdot a_n$, donde $p \in \mathbb{R}$ es una constante. Investigue la convergencia o divergencia de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución: En la condición recursiva $a_{n+1} = p \cdot a_n$ reemplace $n = 1, 2, \ldots$ sucesivamente para tener

$$\begin{aligned} a_2 &= p \cdot a_1, \\ a_3 &= p \cdot a_2, \\ a_4 &= p \cdot a_3, \\ &\cdots \\ a_n &= p \cdot a_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando miembro a miembro estas $n-1$ igualdades se tiene

$$a_n = p^{n-1} \cdot a_1.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } |p| < 1, \\ a_1, & \text{si } p = 1, \\ +\infty, & \text{si } p > 1 \ \& \ a_1 > 0, \\ -\infty, & \text{si } p > 1 \ \& \ a_1 < 0, \\ \text{diverge}, & \text{si } p < -1. \end{cases}$$

Estos límites son fácilmente justificables con las herramientas desarrolladas en clase.
■

(6) Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

siendo $a > 0$.

SOLUCIÓN: Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 2a$ y sea $\frac{a^k}{k!} = c$. Note que $k > 2a$ implica que $\frac{1}{2} > \frac{a}{n}$ para $n \geq k$. Así, si $n > k$ entonces tenemos que:

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = c \cdot \frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n} < \frac{c}{2^{n-k}}.$$

Puesto que claramente $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{2^{n-k}} = 0$, el resultado se sigue con facilidad. ■