Primer Examen Parcial de Cálculo I

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Febrero - Junio, 2010

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Demuestre que si A, B y X son conjuntos, entonces:

$$A \cup B \subseteq X \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X \setminus B.$$

Solución: Asúmase el antecedente de la implicación. Tómese $x \in A$ arbitrario. Como $A \subseteq A \cup B \subseteq X$ se sigue que $x \in X$. Por otro lado, $A \cap B = \emptyset$ implica que $(\forall y \in A)\,(y \notin B)$; en particular $x \notin B$. Con todo,

$$x \in X \wedge x \notin B;$$

es decir, $x \in X \setminus B$.

(2) Supóngase que X, Y y Z son conjuntos. Demuestre que

$$X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z).$$

Solución: Demostremos primero que

$$X \times (Y \setminus Z) \subseteq (X \times Y) \setminus (X \times Z)\,.$$

Sea $x \in X \times (Y \setminus Z)$, entonces existe $a \in X$ y existe $b \in Y \setminus Z$ tal que $x = \langle a, b\rangle$. Note que entonces $(a \in X \wedge b \in Y) \wedge (a \in X \wedge b \notin Z)$; es decir, $\langle a, b\rangle \in X \times Y \wedge \langle a, b\rangle \notin X \times Z$. Consecuentemente $x \in (X \times Y) \setminus (X \times Z)\,.$

Recíprocamente, veamos que

$$(X \times Y) \setminus (X \times Z) \subseteq X \times (Y \setminus Z)\,.$$

Si $x \in (X \times Y) \setminus (X \times Z)$ entonces $x \in (X \times Y)$ y $x \notin (X \times Z)$. También existen $u \in X$ y $v \in Y$ tales que $x = \langle u, v\rangle$. Como $x \notin (X \times Z)$ se debe tener que o bien $u \notin X$ o $v \notin Z$. Dado que sabemos que $u \in X$ debe ocurrir entonces que $v \notin Z$. Entonces $u \in X$ y $v \in Y \setminus Z$; consecuentemente se debe tener que $x = \langle u, v \rangle \in X \times (Y \setminus Z)$.

Ya demostradas las dos contenciones se infiere la igualdad.

(3) Demuestre que si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $c > 0$, entonces no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + c = 0$.

Solución: Dado que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que $x^2 > 0$ y como $c > 0$, entonces sumando lado a lado las desigualdades se sigue que $x^2 + c > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $0^2 + c > 0$, se concluye que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x^2 + c > 0$.

(4) Demuestre que dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$. (Sugerencia: Puede usar libremente que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)[1]

Solución: Primero notemos que $\frac{m}{n} + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. En efecto, si existieran enteros a y b tales que $\frac{m}{n} + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, entonces $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{m}{n}$; es decir, $\sqrt{2}$ sería racional.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, por el Teorema de Densidad, sabemos que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x + \sqrt{2} < r < y + \sqrt{2}$. Entonces $x < r - \sqrt{2} < y$ además de que $r - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(5) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son vacíos y están acotados superiormente. Demuestre que $A \cup B$ está acotado superiormente y que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Solución: Sea $k = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Se afirma que k es cota superior de $A \cup B$. En efecto, sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$ y así o bien $x \leq \sup(A) \leq k$ o $x \leq \sup(B) \leq k$; lo cual demuestra que k es mayor o igual que cualquiera de los elementos de $A \cup B$.

Veamos ahora que k es la mínima de las cotas superiores. Si logramos ver esto entonces k será el supremo. Para esto sea $\varepsilon > 0$. Hay dos posibilidades para k ser igual a $\sup(A)$ o ser igual a $\sup(B)$; en ambos casos se procede enteramente análogo, por eso supongamos sin pérdida de generalidad que $k = \sup(A)$. Como k es el supremo de A debe de existir algún $a \in A$ tal que

$$k - \varepsilon < a \leq k.$$

[1] En la copia del examen que fue entregado hoy a Ustedes pedía $z \in \mathbb{R}$ pero claro que ese problema es mucho más fácil y no tenía relación alguna con $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Si Usted resolvió el problema para $z \in \mathbb{R}$ será calificado acordemente.

Como $A \subseteq A \cup B$ se sigue que $a \in A \cup B$ y así que $k = \sup (A \cup B)$.

(6) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son vacíos y están acotados superiormente. Demuestre que

$$C = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$$

está acotado superiormente y que $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$.

Solución: Sea $k = \sup (A) + \sup (B)$. Veamos que k es el supremo de C. Para esto probaremos que k es cota superior de C y que $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in C) (k - \varepsilon < x \leq k)$.

Para lo primero tomemos $x \in C$ arbitrario. Por la forma de los elementos de C, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x = a + b$. Como $a \leq \sup (A)$ y $b \leq \sup (B)$ se sigue que sumando las desigualdades lado a lado se tiene que

$$a + b \leq \sup (A) + \sup (B) = k.$$

Ahora si $\varepsilon > 0$ es dado, entonces existen $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que

$$\sup (A) - \frac{\varepsilon}{2} < a_0 \leq \sup (A)$$

y

$$\sup (B) - \frac{\varepsilon}{2} < b_0 \leq \sup (B) .$$

Otra vez sumando las desigualdades lado a lado tenemos que

$$k - \varepsilon < a_0 + b_0 \leq k,$$

como se queria demostrar puesto que $a_0 + b_0 \in C$.