Cálculo 1,
Agosto 2007 — Febrero 2008.
Ejercicios 2

1. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ que están acotados superiormente, demuestre que $A \cup B$ y $A \cap B$ están acotados superiormente.

2. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ están acotados superiormente y no son vacíos, demuestre que

$$\sup (A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\}.$$

¿Es también cierto que $\sup (A \cap B) = \min \{\sup A, \sup B\}$? Demuéstrelo o de un contraejemplo.

3. Demuestre que $A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq [a, b]$.

4. Si A y B están acotados ¿qué se puede decir de $A \setminus B$?

5. "A es acotado superiormente si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es acotado inferiormente", ¿es siempre verdadera?

6. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $\sup A = \sup B$ e $\inf A = \inf B$, ¿es cierto que $A = B$?

7. Demuestre que el intervalo $(0, 1)$ no tiene elemento mínimo.

8. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no son vacíos, son acotados superiormente y tal que para cualquier $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x \leq y$, demuestre que $\sup A \leq \sup B$.

9. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no son vacíos, son acotados superiormente, $A \cap B = \emptyset$ y tal que para cualquier $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x < y$.¿Será cierto que $\sup A < \sup B$?

10. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y acotados superiormente. Sea $C = \{c \in \mathbb{R} : (\exists a \in A)\,(\exists b \in B)\,(c = a + b)\}$. Demuestre que $\sup C = \sup A + \sup B$

11. Demuestre que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son tales que: (i) $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, (ii) $A \cup B = \mathbb{R}$ y (iii) $(\forall x \in A)\,(y \in B \Rightarrow x < y)$, entonces (a) $A \cap B = \emptyset$ y (b) existe un único $\xi \in \mathbb{R}$ que satisface que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,((x < \xi \Rightarrow x \in A)\ \&\ (x > \xi \Rightarrow x \in B)).$$