Primer Examen Parcial
Cálculo I
(Agosto 2007 - Febrero 2008)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

1. Sean A y B subconjuntos de números reales con $A \neq \emptyset$ y ambos acotados superiormente. Demuestre que si para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a \leq b$, entonces:

   (a) A y B tienen supremo y
   (b) $\sup A \leq \sup B$.

   Solución: Sea $a \in A$, como por hipótesis existe $b \in B$ tal que $a \leq b$, entonces se sigue que $B \neq \emptyset$. Por el Axioma del Supremo tanto A como B tienen supremo. Sean $u = \sup A$ y $v = \sup B$.

   Para establecer que $\sup A \leq \sup B$ es suficiente con demostrar que v es una cota superior de A (puesto que u es la mínima de todas las cotas superiores de A).

   Sea $a \in A$, como para algún elemento de $b \in B$ se tiene que $a \leq b$ y $b \leq v$, entonces $a \leq v$, como queríamos demostar. Así, v es una cota superior para A.

2. Supóngase que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales tal que

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m \geq n_0)\,(\forall n \geq n_0)\,(|x_m - x_n| < \varepsilon)\,.$$

   Demuestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

   Solución: Presentaremos dos números reales a y b tales que $a < x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Por hipótesis, para $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m \geq n_0)\,(\forall n \geq n_0)\,(|x_m - x_n| < 1)\,;$$

en particular,
$$(\forall n \geq n_0)\left(|x_n - x_{n_0}| < 1\right),$$
o bien $x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1$ para todo $n \geq n_0$. Entonces basta elegir:
$$\begin{aligned} a &= \min\left\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\right\} \cup \left\{x_{n_0} - 1\right\} \\ b &= \max\left\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\right\} \cup \left\{x_{n_0} + 1\right\}. \end{aligned}$$
Es claro que tales reales son los apropiados.

3. Sea $a_1 = 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sea
$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$
Use directamente la definición para demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite.

Solución: Primero observemos que
$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$
Con esto en mano procedamos a usar la definición para demostrar que $a_n \to 0$. Sea $\varepsilon > 0$, por la Propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces para cada $n \geq N$ se tiene que
$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$
Por lo tanto,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

4. Demuestre que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a 0 y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a 0.

Solución: Por uno de los ejercicios sabemos que existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $\varepsilon > 0$, arbitrario. Como $a_n \to 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ para todo $n \geq m$. Entonces si $n \geq m$ se tiene que
$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon;$$
es decir,
$$(\forall n \geq m)\left(|a_n \cdot b_n| < \varepsilon\right)$$
y así: $a_n b_n \to 0$, como se quería demostrar.

5. Demuestre que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión con $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que diverge a infinito, entonces la sucesión $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también diverge a infinito.

   Solución: Sea $K \in \mathbb{R}$, como $b_n \to \infty$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $K \leq b_n$ para todo $n \geq k$. Entonces, para $n \geq k$, también se tiene que

$$a_n + b_n \geq b_n \geq K;$$

   es decir,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty.$$

6. Calcule el límite (si existe) de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Solución: Observese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2n^2}.$$

   Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

   y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

   entonces por un teorema demostrado en clase se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1.$$