Primer Examen Parcial
Cálculo I
(Marzo - Agosto, 2007)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:____

Correo electrónico:____

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *A partir del segundo, en cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Responda a cada inciso falso o verdadero según considere conveniente:

(a) Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son vacíos y son acotados, entonces $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$ siempre que $\sup A = \sup B$ y $\inf A = \inf B$.
Falso. Para un contraejemplo basta tomar $A = \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\}$ y $B = \left\{0, \frac{2}{3}, 1\right\}$.

(b) Si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son funciones y g no es sobreyectiva, entonces $g \circ f$ no es sobreyectiva.
Verdadero. En efecto, como g no es sobreyectiva entonces existe $c \in C$ tal que $g(b) \neq c$ para todo $b \in B$. Ahora debe ser claro que $g \circ f(a) = g(f(a)) \neq c$ para todo $a \in A$.

(c) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones tales que $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces así son $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Falso. Basta tomar $a_n = -n$ y $b_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(d) Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite ℓ cuando $n \to \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \ell$.
Verdadero. Dado $\varepsilon > 0$, como $x_n \to \ell$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. En particular, como $2n \geq n$, entonces pidiendo que $n \geq n_0$ se debe tener que también ocurre $|x_{2n} - \ell| < \varepsilon$. Entonces para este mismo n_0 se tiene que $|x_{2n} - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$; es decir, $x_{2n} \to \ell$

(2) Determinar si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ para $n \in \mathbb{N}$, tiene límite y, de ser ese el caso, si ℓ es el límite, entonces dado $\varepsilon > 0$, determine un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Solución: Si multiplicamos y dividimos a_n por $\frac{1}{n^2}$ observamos que

$$a_n = \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

y esto nos lleva a sospechar que el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser 1. Veamos como estableser eso. Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{\left(n^2-1\right)-\left(n^2+1\right)}{n^2+1}\right| = \frac{2}{n^2+1}.$$

Así entonces, $|a_n - 1| < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{2}{n^2+1} < \varepsilon$. En consecuencia, basta elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 = 1$ si $\frac{2}{\varepsilon} < 1$ o bien $n_0 > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$ si $\frac{2}{\varepsilon} \geq 1$ para obtener que

$$(\forall n \geq n_0)\,(|a_n - 1| < \varepsilon)$$

y confirmar así que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(3) Demuestre que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$. (Indicación: usar directamente la definición o usar resultados sobre límites de sucesiones.)

Solución: Observese que

$$0 < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+i)^2} \leq \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$. Por uno de nuestros resultados en clase se tiene que la sucesión $(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite y

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

(4) Considere la sucesión recurrente b_n, $n \in \mathbb{N}$, donde cada b_n está dado por:

$$b_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicales}}.$$

Demuestre que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y encuentre el valor del límite de la sucesión.

Solución: Primeramente para ver a esta sucesión como una sucesión recurrente uno puede escribir: $b_1 = \sqrt{2}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$.

Veamos por inducción que $b_n \leq b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es fácil porque $b_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = b_2$. Ahora, suponiéndolo válido para n veamos que también es válido para $n + 1$:

$$b_n \leq b_{n+1} \Rightarrow 2 + b_n \leq 2 + b_{n+1} \Rightarrow \sqrt{2 + b_n} \leq \sqrt{2 + b_{n+1}};$$

es decir, $b_{n+1} \leq b_{n+2}$. Así que $b_n \leq b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

También por inducción no es difícil ver que $b_n \leq 7$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, $b_1 < 7$ y si $b_n \leq 7$, entonces

$$2 + b_n \leq 2 + 7 \Rightarrow b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} \leq \sqrt{9} = 3 < 7.$$

Así entonces la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada. Por uno de los teoremas demostrados en clase sabemos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, digamos a ℓ. Otra vez, haciendo uso de los teoremas vistos en clase podemos hacer

$$\ell = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} b_n} = \sqrt{2 + \ell}.$$

Por lo tanto, $\ell^2 - \ell - 2 = 0$ o bien $(\ell + 1)(\ell - 2) = 0$ y así $\ell = -1$ o $\ell = 2$. Sin embargo, dado que todos los términos de la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son positivos, se debe tener que $\ell = 2$.

(5) Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty.$$

Solución: Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$. Para esto fijemos un $\eta \in \mathbb{R}$. Queremos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n - b_n < \eta$ para todo $n \geq n_0$.

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n > K - \eta$ para todo $n \geq n_0$. Entonces
$$a_n - b_n < a_n + (\eta - K) \leq \eta$$
puesto que $a_n - K$ es positivo. Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$.

(6) Demostrar que si $0 < |a_{n+1}| < K \cdot |a_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $0 < K < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Solución: Para $n \geq 2$ se tiene que
$$0 < |a_n| < K \cdot |a_{n-1}| < K^2 |a_{n-2}| < \cdots < K^{n-1} \cdot |a_1| .$$
Por lo tanto,
$$0 < |a_n| < K^{n-1} \cdot |a_1|$$
para $n \geq 2$. Además en clase establecimos que si $0 \leq x < 1$, entonces $x^n \to 0$. Por lo tanto, $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite (por un resultado mostrado en clase) y
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| \leq |a_1| \cdot \lim_{n\to\infty} K^{n-1} = 0.$$
Finalmente, un ejercicio establece que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Esto completa la demostración.