Primer Examen Parcial
Cálculo I (Segunda vuelta)
(Marzo - Agosto, 2007)
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH

Nombre completo:______________________________

Correo electrónico:______________________________

Instrucciones: Este examen consta de cinco problemas. De los seis problemas propuestos Usted deberá escoger cinco de ellos. *En cada ejercicio se pide una demostración completa*, pero no exageradamente detallada. Use su buen juicio para decidir el nivel de detalle requerido. El tiempo para resolver este examen es de dos horas.

(1) Sean A y B dos subconjuntos de números reales que no son vacíos, que B es acotado inferiormente y $A \subseteq B$. Demuestre que A tiene ínfimo y que $\inf A \geq \inf B$.

Solución: Como B está acotado inferiormente, entonces, por teorema demostrado en clase, B tiene ínfimo. Pongamos $\beta = \inf B$.

Puesto que β es en particular cota inferior de B, se tiene que $(\forall x \in B)\,(\beta \leq x)$. Por lo tanto, si $x \in A$ entonces $x \in B$ y en consecuencia $\beta \leq x$. Por lo tanto, β es una cota inferior de A. Siendo $A \neq \emptyset$, el conjunto A también tiene ínfimo, digamos $\alpha = \inf A$.

Ahora, α es la mayor de todas las cotas inferiores de A. Como β es una cota inferior de A se debe tener que $\beta \leq \alpha$, como se queria demostrar.

(2) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y defina otras dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haciendo

$$x_n = a_{2n} \;\;\&\;\; y_n = a_{2n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell = \lim_{n\to\infty} y_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $x_n \to \ell$ existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_1$. Puesto que $y_n \to \ell$ existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_2$. Pongamos $n_0 = 2\left(\max\{n_1, n_2\}\right) + 1$. Entonces si $n \geq n_0$, tenemos dos casos:

(a) n ES UN NÚMERO PAR.
En este caso $n = 2\left(\frac{n}{2}\right)$. Para mayor claridad, pongamos $m = \frac{n}{2}$. Entonces es fácil ver que $m \geq n_1$ y que $a_n = a_{2m} = x_m$. Puesto que $m \geq n_1$ se debe tener que $|x_m - \ell| < \varepsilon$; es decir, que $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

(b) n ES UN NÚMERO IMPAR.
En este caso $n = 2\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$. También, para mayor claridad, pongamos $m = \frac{n-1}{2}$. Es igualmente fácil demostrar que en este caso $m \geq n_2$ y que $a_n = a_{2m+1} = y_m$. Puesto que $m \geq n_2$ se tiene entonces que $|y_m - \ell| < \varepsilon$; es decir, que $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Es decir, en cualquier caso, $|a_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ y así $a_n \to \ell$, como se queria demostrar.

(3) Considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. ¿Tendrá límite esta sucesión? ¿Cuál es?

Solución: Obsérvese que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq \sqrt[2]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt[2]{(n+1)^2} + \sqrt[2]{n+1}\,\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$, se sigue que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite, por un teorema demostrado en clase, y además

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = 0.$$

(4) Sea $A = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Demuestre que A es un subconjunto acotado de números reales y encuentre su supremo.

Solución: Empecemos por notar que A es el conjunto de términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que dicha sucesión es monótona creciente.

Por otra parte, por ejemplo hecho (dos veces) en clase, las sucesiones $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma $b_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, para $|x| < 1$, son convergentes y

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{1-x}.$$

Puesto que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de esa forma para $x = \frac{1}{2}$, se tiene que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y por lo tanto acotada. Así, el conjunto A no es vacío y es acotado superiormente; en consecuencia A tiene supremo.

También es un resultado demostrado en clase que una sucesión creciente y acotada converge al supremo del conjunto de sus términos. Por lo tanto,

$$\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

(5) Demustre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ y que un teorema similar para un límite $\ell \neq 0$ no es cierto; es decir, muestre que si $\ell \neq 0$, entonces no es cierto que: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \ell$.

Solución: Supongamos primero que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y veamos que entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Para tal efecto, fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Nuestra suposición implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - 0| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Pero $||a_n| - 0| = |a_n - 0|$; por lo tanto, si $n \geq n_0$, entonces $||a_n| - 0| < \varepsilon$ y en consecuencia se tiene que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Ahora supongamos que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ y veamos que entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nuevamente fijemos $\varepsilon > 0$. Para este ε existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||a_n| - 0| < \varepsilon$, para toda $n \geq n_0$; es decir, $|a_n - 0| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Comprobamos así que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Finalmente, para demostrar que no es cierto que: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \ell$, cuando $\ell \neq 0$, basta con considerar la sucesión $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esta sucesión no converge pero la sucesión de los valores absolutos de sus términos sí converge.

(6) Encuentre $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$. Sugerencia: las igualdades

$$1 + \frac{2}{n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad 1 + \frac{3}{n} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

pueden ser de utilidad.

Solución: Usando las igualdades sugeridas podemos observar que:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{n} &= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

veamos que los otros dos factores tienden al mismo límite. En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \\ &= e \cdot \frac{1}{1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} \\ &= e \cdot 1 \\ &= e \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2}\\ &= e.\end{aligned}$$

Con todo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^3.$$